

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2023.12.012

# 新型两平移一转动并联机构的拓扑设计及性能分析\*

耿宗海, 李 菊\*, 沈惠平, 杨廷力

(常州大学 现代机构学研究中心, 江苏 常州 213016)

**摘要:** 针对工业生产中需要小范围精确作业, 又需要大范围单向操作的双重需求问题, 对两平移一转动(2T1R)输出的并联机构进行了研究。首先, 采用了基于方位特征集的拓扑结构设计方法, 设计并分析了一种新型两平移一转动并联机构, 给出了拓扑设计过程, 对其自由度等主要拓扑特性进行了验证; 然后, 采用了基于拓扑特征的运动学建模方法, 对该机构进行了运动学分析, 研究了该机构的符号式位置正、反解, 并根据位置正、反解分别研究了该机构的可达工作空间、动平台中点的速度和加速度曲线以及三类奇异位置; 最后, 采用基于虚功原理的序单开链法, 建立了动力学模型并进行了动力学分析, 研究了该机构所需要的驱动力。研究表明: 该并联机构的速度加速度、驱动力的仿真曲线和理论曲线的相对误差在2%以内, 机构的运动学与动力学模型建立无误, 可为该并联机构后续的误差分析、运动轨迹规划与控制奠定基础。

**关键词:** 并联机构; 拓扑设计; 位置正反解; 运动学分析; 动力学分析

中图分类号: TH112

文献标识码: A

文章编号: 1001-4551(2023)12-1931-08

## Topological design and performance analysis of a new type 2T1R parallel mechanism

GENG Zonghai, LI Ju, SHEN Huiping, YANG Tingli

(Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213016, China)

**Abstract:** Aiming at the dual demand problem of precise operation in a small range and unidirectional operation in a large range in industrial production, the parallel mechanism with two translation and one rotation (2T1R) outputs was studied. Firstly, a new type of parallel mechanism with two translations and one rotation was designed and analyzed by using the topology design method based on azimuth feature set. The topological design process of the mechanism was given, and main topological characteristics of the mechanism such as degrees of freedom were verified. Then, the kinematic modeling method based on topological features was used to establish the kinematic model for kinematic analysis, and the symbolic positional positive and negative solutions of the mechanism were studied. According to the positive and negative solutions of the mechanism, the reachable workspace of the mechanism, the velocity and acceleration curves of the middle point of the moving platform of the mechanism and three types of singular positions of the mechanism were studied respectively. Finally, the dynamic model was established and the dynamic analysis was carried out by using the sequential single open chain method based on the principle of virtual work, and the driving force required by the mechanism was studied. The results show that the relative error of the simulation curve and theoretical curve of the speed, acceleration and driving force of the parallel mechanism is less than 2%, and the kinematic and dynamic model of the mechanism is established correctly, which lays a foundation for the error analysis, trajectory planning and control of the mechanism.

**Key words:** parallel mechanism; topology design; positive and negative solutions of position; kinematics analysis; dynamics analysis

## 0 引 言

2T1R 并联机构具有控制容易、制造成本较低等优

点, 同时具有移动和转动输出元素, 因此, 被广泛应用于抓取、调姿等实际生产操作领域<sup>[1-2]</sup>。但是目前有关 2T1R 并联机构的相关研究仍然较少。

收稿日期: 2023-04-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51975062)

作者简介: 耿宗海(1999-), 男, 江苏盐城人, 硕士研究生, 主要从事并联机构方面的研究。E-mail: 1020590445@qq.com

通信联系人: 李菊, 女, 副教授, 硕士生导师。E-mail: wangju0209@163.com

WANG J 等人<sup>[3]</sup>提出了一种 Cylindrical 型的 2T1R 并联机构模型。杨廷力等人<sup>[4]</sup>基于单开链理论的方法,提出了多种 2T1R 并联机构的模型。KONG X W 等人<sup>[5]</sup>、杨宁等人<sup>[6]</sup>采用螺旋理论的方法,提出了 2T1R 并联机构的模型。REFAAT S 等人<sup>[7]</sup>基于位移粒子群理论的机构分析法,综合研究了多种 2T1R 并联机构的构型。张彦斌等人<sup>[8]</sup>采用线性变换理论法,提出了无奇异性的 2T1R 并联机构的模型。吴鑫等人<sup>[9]</sup>提出了一种新型 2T1R 并联机构模型,并对该机构进行了运动学分析。邓嘉鸣等人<sup>[10]</sup>提出了一种无寄生运动非对称空间 2T1R 并联机构模型,并分析了其运动学性能。沈惠平等人<sup>[11]</sup>提出了一种具有解析式位置正解的 2T1R 的并联机构,并研究了其运动学性能。

已有的上述 2T1R 并联机构大多数耦合度不为零,且不具有部分运动解耦的特性,这使得运动学和动力学分析等方面较为复杂<sup>[12]</sup>,故均缺乏对所设计机构动力学的分析。

机构动力学分析方法中的拉格朗日法<sup>[13]</sup>的特点是运用能量守恒定律建立动力学方程,其计算量较大;凯恩法<sup>[14]</sup>较简单,但其对于力和力矩的分析比较匮乏;牛顿-欧拉法<sup>[15]</sup>易求出约束反力,但对于构件较多的机构的分析较复杂。

笔者运用基于虚功原理的序单开链法<sup>[16]</sup>进行动力学建模分析,以子运动链(sub kinematic chain, SKC)为基本单元,这样不仅能求出驱动力,还能求出其连接处的支反力,以便机构结构的强度设计<sup>[17]</sup>。

因此,笔者提出一种新型运动解耦的 2T1R 并联机构,采用基于拓扑特征的运动学建模方法,对该机构进行位置分析;进一步采用基于虚功原理的序单开链法对该机构进行动力学分析,为后续机构分析和样机研发提供基础。

## 1 机构设计和分析

### 1.1 机构设计

#### 1.1.1 机构设计思路

串联、并联机构的方位特征 ( position and orientation characteristic, POC) 集的计算公式<sup>[18]6-7</sup>表示如下:

$$M_{bi} = \bigcup_i^m M_{ji} \quad (1)$$

$$M_{Pa} = \bigcap_i^{v+1} M_{bi} \quad (2)$$

式中: $M_{ji}$ 为第  $i$  个运动副的 POC 集; $M_{bi}$ 为第  $i$  条支链末端的 POC 集; $M_{Pa}$ 为机构动平台的 POC 集。

一方面,为设计出所需的 2T1R 并联机构,需构造约束度为零,且含部分驱动副的结构简单、支链干涉少的混合支链;另一方面,笔者设计的 2T1R 并联机构拟采用两混合支链的结构,且其末端运动输出至少都须包含 2T1R 元素,具体如下。

#### 1.1.2 机构设计过程

2T1R 并联机构设计过程如图 1 所示。

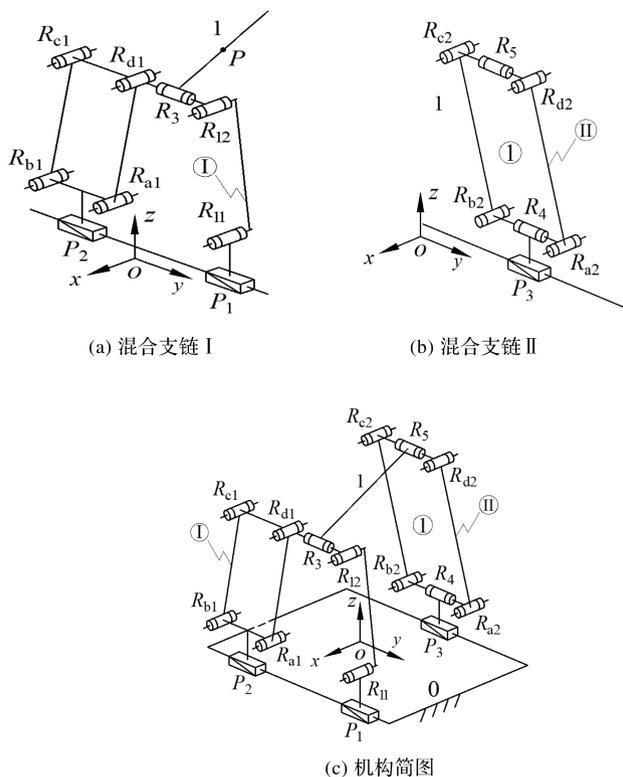


图 1 2T1R 并联机构设计过程

Fig. 1 Design process of 2T1R parallel mechanism

#### 1) 混合支链 I 的设计

首先,混合支链 I 的设计如图 1(a) 所示,其主要由一个 2T 平面机构串联一个  $R_3$  构成。其中,2T 平面机构主要由两支链构成,移动副  $P_1$  和转动副  $R_{12}$ 、 $R_{11}$  串联组成子支链 1,移动副  $P_2$  和 4R 平行四边形( $R_{a1}$   $R_{b1}$   $R_{c1}$   $R_{d1}$ ) 结构  $P_a$  串联构成子支链 2,且  $P_1$  和  $P_2$  共线。因此,混合支链 I 记为:  $HSOC_1 \{ - P_1 \perp R_{11} \parallel R_{12} \perp R_3 - Pa - P_2 - \}$ ,符号“ $\parallel$ ”、“ $\perp$ ”分别表示运动副的轴线平行和垂直。

为便于表达,在静平台 0 上建立坐标系  $o-xyz$  (其中, $y$  轴与  $P_1$  轴线平行, $z$  轴与静平台 0 的法线平行)。

由式(2)可知,混合支链 I 输出构件末端 POC 集为 2T1R,即:具有在  $yoz$  平面的二维(2T)移动以及绕  $y$  轴的转动。

2) 混合支链 II 的设计

同样,混合支链 II 至少应包含两平移—转动元素,且必含有一个驱动副。笔者拟采用平行四边形结构来优化机构的承重能力。这样,混合支链 II 由移动副  $P_3$  和  $4R(R_{a2}R_{b2}R_{c2}R_{d2})$  平行四边形结构  $P_a^{(1)}$  串联构成,  $P_a^{(1)}$  的两短杆上有两轴线平行的转动副  $R_4, R_5$ , 且  $R_5$  与  $R_3$  组成动平台 1, 如图 1(b) 所示。其拓扑结构等效记作  $HSOC_2\{-P_3 \parallel R_4(-P_a^{(1)}) \parallel R_5-\}$ 。由式(1) 可得,该混合支链 II 的输出运动为 3T1R, 包含了两个平移和一个转动元素;

3) 机构设计

笔者将混合支链 I 和 II 并联连接于动平台 1、静平台 0 之间,且使  $P_3 \parallel P_1$ , 得到所需设计的 2T1R 并联机构如图 1(c) 所示,其动平台 1 的 POC 集由式(2) 可表示如下:

$$M_{Pa} = M_{HSOC_1} \cap M_{HSOC_2} = \left[ \begin{matrix} t^2(\perp R_{11}) \\ r^1(\parallel R_3) \end{matrix} \right] \cap \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_5) \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} t^2(\perp R_{11}) \\ r^1(\parallel R_3) \end{matrix} \right] \quad (3)$$

上式表明,混合支链 II 提供支链 I 中的一维转动,支链 I 约束了 II 中的移动。因此,笔者设计的并联机构仅具有两平移—转动特性。

1.2 机构自由度验证

1) 机构的全周自由度

机构全周自由度计算公式<sup>[18]77-80</sup>如下:

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \quad (4)$$

$$\xi_{L_j} = \dim. \left\{ \left( \bigcap_{i=1}^j M_{bi} \right) \cup M_{b(j+1)} \right\} \quad (5)$$

式中: $F$  为自由度; $f_i$  为第  $i$  个运动副的自由度; $m$  为运动副数; $v$  为独立回路数( $v = m - n + 1$ ,  $n$  为构件数); $\xi_{L_j}$  为第  $j$  个独立回路的独立位移方程数; $\bigcap_{i=1}^j M_{bi}$  为前  $j$  条支链组成子并联机构的 POC 集; $M_{b(j+1)}$  为第  $j+1$  条支链末端构件的 POC 集;

2) 机构的自由度

该机构包含两个独立回路分别为:第 1 回路为混合支链 I 中独立位移方程数为  $\xi_{L1} = 3$  的 2T 平面机构;第 2 回路由上述回路和  $R_3$ 、混合支链 II 构成,可记为  $LOOP_2\{-R_3 \parallel R_5 \parallel R_4(-P_b) \parallel P_3-\}$ , 则其独立位移方程数由式(5) 计算可得  $\xi_{L2} = 4$ 。

则根据式(4), 该机构的自由度为:  $F = (5 + 5) - (3 + 4) = 3$ 。

由上述可知,该机构自由度为 3, 驱动副为移动副  $P_1, P_2, P_3$ 。当驱动副以相同速度运动时, 机构可完成

$y$  方向上单向移动; 而以不同速度运动时, 可实现小范围内的 2T1R 精确移动。

由此可见, 该机构只包含 2 个耦合度为 0 的 SKC。因此, 可独立求解 2 个 SKC, 得到正解。

2 机构位置分析

2.1 运动学建模

机构运动学建模如图 2 所示。

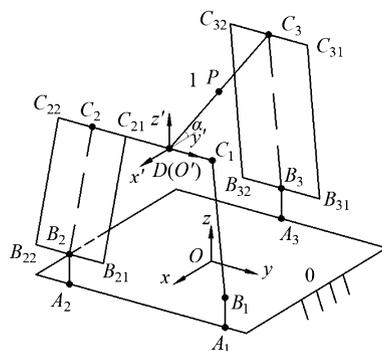


图 2 机构运动学建模

Fig. 2 Kinematics modeling of mechanism

假设静平台 0 的长、宽分别为  $2a, 2b$ , 在其中心  $O$  处建立静坐标系  $O-xyz$ ,  $x, y$  轴分别垂直、平行于  $A_1A_2$  连线,  $z$  轴由右手定则确定。

同理, 在动平台 1 的  $D$  处建立动坐标系  $O'-x'y'z'$ 。设  $A_iB_i (i = 1, 2, 3) = l_1, B_iC_i (i = 1, 2) = l_2, C_{21}C_{22} = l_3, C_{21}C_1 = l_4, DC_3$  (动平台)  $= 2d, C_3B_3 = l_5, B_{31}B_{32} = l_6, DC_3$  与  $x$  负半轴夹角为  $\alpha$ 。

2.2 位置正解分析

位置正解为: 已知输入点  $A_i (i = 1, 2, 3)$  的移动位置  $y_1, y_2, y_3$ , 求动平台 1 中点  $P(x, y, z)$  及姿态角  $\alpha$ 。

1) 第 1 回路的求解

在静坐标系  $O-xyz$  中, 可知点  $A_i$  和  $B_i (i = 1, 2, 3)$  坐标分别为:  $A_1 = (b, y_1, 0), A_2 = (b, y_2, 0), A_3 = (-b, y_3, 0), B_1 = (b, y_1, l_1), B_2 = (b, y_2, l_1), B_3 = (-b, y_3, l_1)$ 。

由机构约束条件可知  $y_D = y = y_{C3}$ , 易得:  $C_1 = (b, y + l_4/2, z_D), C_2 = (b, y - l_3/2 - l_4/2, z_D)$ 。

又由约束条件  $B_1C_1 = B_2C_2 = l_2$ , 可得位置约束方程组, 其求解结果表示如下:

$$\begin{cases} y = \frac{y_1 + y_2 + l_3/2}{2} \\ z_D = l_1 + p \sqrt{l_2^2 - (y + l_4/2 - y_1)^2}, p = \pm 1 \end{cases} \quad (6)$$

2) 第 2 回路的求解

动平台上点  $C_3$  的坐标表示为:  $C_3 = (b - 2d\cos\alpha,$

$y, z_D + 2d\sin\alpha)$ 。

由约束条件  $B_3C_3 = l_5$  可得约束条件方程,经化简整理,其结果表示如下:

$$\alpha = 2\arctan \frac{J_1 + q \sqrt{J_1^2 + J_2^2 - J_3^2}}{J_2 - J_3}, q = \pm 1 \quad (7)$$

$$J_1 = 4d(z_D - l_1) \quad (8)$$

$$J_2 = -8bd \quad (9)$$

$$J_3 = 4b^2 + 4d^2 + (z_D - l_1)^2 + (y - y_3)^2 - l_5^2 \quad (10)$$

由此可得,中点  $P$  的坐标为  $P = (x, y, z) = (b - d\cos\alpha, y, z_D + d\sin\alpha)$ , 易知该机构具有部分运动解耦性。

### 2.3 位置反解分析

位置反解为:已知动平台中点  $P(x, y, z)$  和姿态角  $\alpha$ , 求输入点  $A_i (i = 1, 2, 3)$  的移动位置  $y_1, y_2, y_3$ 。

由式(6)及约束条件  $B_3C_3 = l_5$  可得结果如下:

$$\begin{cases} y_1 = y + l_4/2 + m \sqrt{l_2^2 - M^2}, m = \pm 1 \\ y_2 = 2y - y_1 - l_3/2 \\ y_3 = y + n \sqrt{A - B}, n = \pm 1 \end{cases} \quad (11)$$

其中:

$$\begin{cases} A = L_5^2 - 4b^2 - 4d^2 - (z - d\sin\alpha - l_1)^2 \\ B = J_1 \sin\alpha + J_2 \cos\alpha \end{cases} \quad (12)$$

### 2.4 正反解验算

设该机构结构参数(单位: mm)为:  $a = 350, b = 150, d = 100, l_1 = 30, l_2 = 200, l_3 = 120, l_4 = 140, l_5 = 300, l_6 = 160$ 。笔者取 3 个驱动副的位置(单位: mm)分别为  $y_1 = 270, y_2 = -110, y_3 = 160$ , 代入式(6)~式(10), 得到动平台中点  $P$  的机构位置正解数值, 如表 1 所示。

表 1 机构位置正解数值

Table 1 Positive solution value of mechanism position

序号	$y/\text{mm}$	$z/\text{mm}$	$\alpha/\text{rad}$
1 *	110	254.073	0.472
2	110	108.636	-1.546
3	110	-48.636	1.546
4	110	-137.608	0.110

其对应的机构位置正解构型图分别如图 3 所示。

由图 3 可知: 只有图 3(a) 所示构型符合实际, 故取表 1 中序号 1 \* 对应的数据代入式(11)、式(12), 得到机构驱动输入参数, 如表 2 所示。

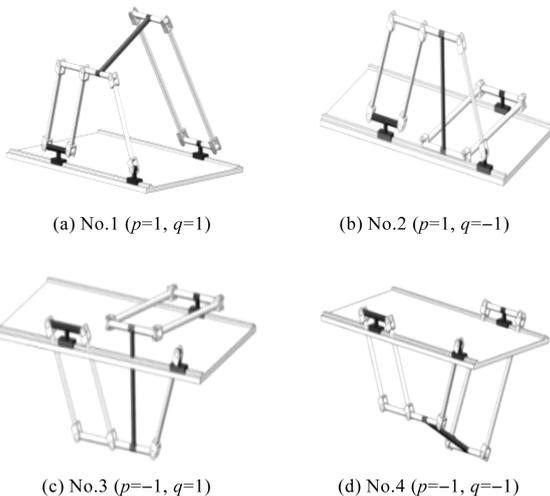


图 3 机构位置正解构型图

Fig. 3 Configuration diagram of positive position of mechanism

表 2 机构驱动的输入参数

Table 2 Input parameters of mechanism drive

序号	$y_1/\text{mm}$	$y_2/\text{mm}$	$y_3/\text{mm}$
1 *	270	-110	159.967
2	270	-110	60.032
3	90	70	159.967
4	90	70	60.033

经笔者验证可知, 机构正反解计算无误。

### 3 可达工作空间

因笔者所述机构具有符号式位置正解, 故笔者采用基于位置正解的离散化方法<sup>[19]198-200</sup>求工作空间。该方法求解效率高、结果精确。为此, 根据静平台参数确定驱动副位置的搜索范围(单位: mm):  $70 \leq y_1 \leq 300, -300 \leq y_2 \leq -70, -300 \leq y_3 \leq 300$ 。

笔者采用 MATLAB 计算得到动平台中点的三维工作空间示意图, 如图 4 所示。

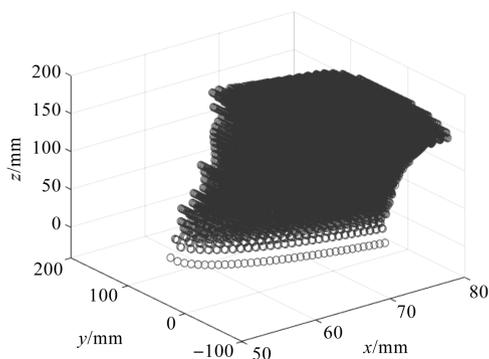


图 4 动平台中点的三维工作空间示意图

Fig. 4 Three-dimensional working space diagram of the mid-point of the moving platform

## 4 奇异性与速度分析

### 4.1 机构奇异性分析方法

笔者采用基于雅可比矩阵的奇异位形分析方法<sup>[19]194-197</sup>,对该机构进行奇异性与速度分析。

设输出速度 $\dot{\mathbf{X}} = [y \ z \ \alpha]^T$ ,输入速度 $\dot{\boldsymbol{\rho}} = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$ ,则对机构满足的约束条件 $B_1 C_1 = B_2 C_2 = l_2$ 、 $B_3 C_3 = l_3$ 建立的约束方程进行全微分,结果表示如下:

$$\mathbf{J}_o \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (13)$$

其中:

$$\mathbf{J}_o = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{J}_i = - \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix},$$

$$f_{11} = df_1/dy = 2(y + l_4/2 - y_1), f_{21} = df_2/dy = 2(y - l_3/2 - l_4/2 - y_2),$$

$$f_{31} = df_3/dy = 2(y - y_3), f_{12} = df_1/dz = 2(z - dsin\alpha - l_1),$$

$$f_{22} = df_2/dz = 2(z - dsin\alpha - l_1), f_{32} = df_3/dz = 2(z + dsin\alpha - l_1),$$

$$f_{13} = df_1/d\alpha = 2dcos\alpha(dsin\alpha + l_1 - z), f_{23} = df_2/d\alpha = -2dcos\alpha(z - dsin\alpha - l_1),$$

$$f_{33} = df_3/d\alpha = 4dsin\alpha(2b - 2dcos\alpha) + 2dsin\alpha(z + dsin\alpha - l_1),$$

$$g_{11} = df_1/dy_1 = 2(y_1 - l_4/2 - y), g_{22} = df_2/dy_2 = -2(y - l_4/2 - l_3/2 - y_2), g_{33} = df_3/dy_3 = -2(y - y_3)。$$

### 4.2 动平台中点的速度和加速度分析

#### 4.2.1 速度和加速度公式与计算

当机构处于非奇异位置,且 $\mathbf{J}_o$ 可逆时,由式(13)得动平台中点 $P$ 的速度表示如下:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_o^{-1} \mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (14)$$

对式(14)进行求导,得到输入与输出加速度之间的关系表示如下:

$$\mathbf{a} = \mathbf{J}_o^{-1} \mathbf{J}_i \ddot{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{J}_o^{-1} \dot{\mathbf{K}}_0 \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_0 = [\mathbf{K}_1 \ \mathbf{K}_2 \ \mathbf{K}_3]^T \quad (16)$$

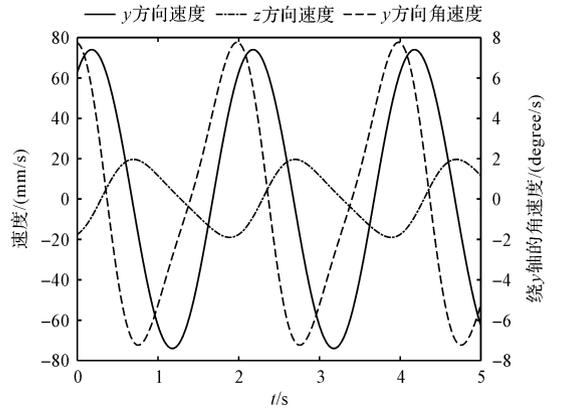
式中: $\mathbf{K}_0$ 为 $\mathbf{J}_o$ 和 $\mathbf{J}_i$ 内各项元素对时间 $t$ 的导数。

其余杆件的速度和加速度可由刚体的速度(加速度)合成定律求出,此处略去推导过程。

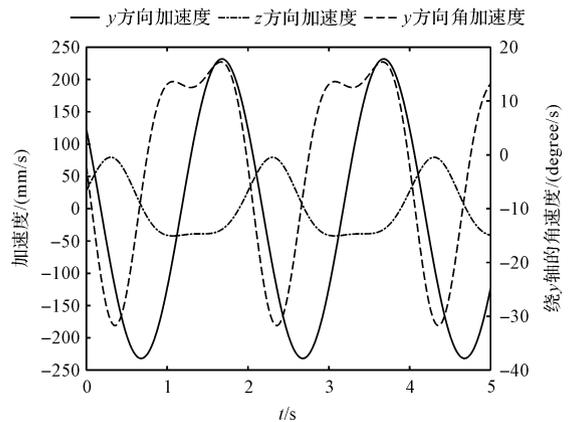
#### 4.2.2 速度和加速度算例验算

机构参数在 2.4 节中已给出。若该机构的 3 个输

入函数(单位: mm)分别为 $y_1 = 40\sin(\pi t) - 224.64$ 、 $y_2 = -25\cos(\pi t) - 121.01$ 、 $y_3 = 15\sin(\pi t) + 120.22$ ,由 MATLAB 计算式(14)、式(15),可得到动平台中点 $P$ 的速度和加速度的理论曲线,如图 5 所示。



(a) 速度理论变化曲线



(b) 加速度理论变化曲线

图 5 动平台中点速度和加速度的理论曲线

Fig. 5 Theoretical curve of midpoint velocity and acceleration of moving platform

同时,笔者运用 ADAMS 软件建立运动学模型,并进行模拟仿真,得到与理论相差不大的仿真速度和加速度曲线。因此,运动学模型建立无误。

### 4.3 奇异性分析

#### 4.3.1 输入奇异

当 $\det(\mathbf{J}_i) = 0$ 时,发生输入奇异。3 种情况如下:

- 1)  $g_{11} = 0$ , 即  $y_{A1} = y_{C1}$  时,发生输入奇异 1;
- 2)  $g_{22} = 0$ , 即  $y_{A2} = y_{C2}$  时,发生输入奇异 2;
- 3)  $g_{33} = 0$ , 即  $y_{A3} = y_{C3} = y_P$  时,发生输入奇异 3。

机构的 3 种输入奇异位置如图 6 所示。

#### 4.3.2 输出奇异

当 $\det(\mathbf{J}_o) = 0$ ,发生输出奇异,有 2 种情况:

当 $f_{11} = f_{21}$ , 即  $y_1 - y_2 = l_3/2 + l_4$  时,发生输出奇异,此时机构的位置如图 6(a)、图 6(b)所示;

当 $f_{11} \neq f_{21}$ , 且  $f_{22}f_{33} = f_{32}f_{23}$  时,有 2 种情况如下:

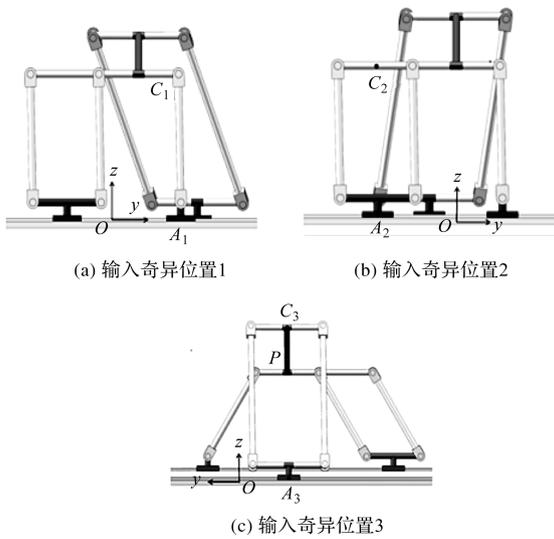


图 6 机构 3 种输入奇异位置

Fig. 6 Three input singular positions of mechanism

①当  $z = d\sin\alpha + l_1$ , 此时  $f_{22}f_{33} = 0$ , 即  $z_{B3} = z_{C3}$  时发生输出奇异, 机构输出奇异位置如图 7 所示。

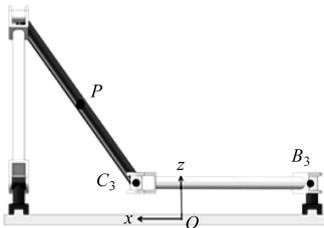


图 7 机构输出奇异位置

Fig. 7 Singular position of mechanism output

②当  $z \neq d\sin\alpha + l_1$ , 即  $(z - l_1)\cos\alpha + 2b\sin\alpha = d\sin\alpha\cos\alpha$  时, 机构发生输出奇异。

### 4.3.3 综合奇异

当  $\det(\mathbf{J}_o) = \det(\mathbf{J}_i) = 0$  时, 发生综合奇异。

经分析, 当  $y_{A1} = y_{C1}$ , 且  $y_{A2} = y_{C2}$  相等时, 发生综合奇异, 如图 6(a)、图 6(b) 所示。

## 5 动力学分析

### 5.1 基于虚功原理的序单开链法基本原理

对一个广义速度为  $q'_f = [q'_1, q'_2, \dots, q'_f]$  的机械系统, 可分成多个 SKC, 而各 SKC 又可分成不同约束度的单开链 (single opened chain, SOC)。假定解除不同 SKC 连接处的约束, 则可得到一个新系统。这样, 在被解除约束处形成的支反力就转化为了新系统的未知外力。

笔者基于虚功原理建立动力学方程, 求解驱动力。

### 5.2 受力分析

构件上所受的力主要是重力和惯性力, 且仅受惯

性力矩。为了简化计算, 将杆件所受的外力 (矩) 化简为对应质心的合力矢量  $\mathbf{Q}$ 。

#### 1) 动平台

取  $P$  为动平台质心, 则其合力矢量表示如下:

$$\mathbf{Q}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_P \\ \mathbf{M}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p + m_p \mathbf{g} - m_p \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\tau}_p - \mathbf{I}_p \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_p \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{f}_p$  为动平台所受的外力;  $\boldsymbol{\tau}_p$  为动平台所受的外力矩;  $m_p$  为动平台的质量;  $\mathbf{a}$  为动平台的加速度;  $\mathbf{I}_p$  为动平台的惯性矩阵;  $\boldsymbol{\omega}$  为动平台的角速度;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为动平台的角加速度。

#### 2) 各驱动副 $P_i (i = 1, 2, 3)$

各驱动副  $P_i$  及连接杆的合力矢量表示如下:

$$\mathbf{Q}_{A_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{A_i} \\ \mathbf{M}_{A_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{A_i} + m_{A_i} \mathbf{g} - m_{A_i} \mathbf{a}_{A_i} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ 0]^T \quad (19)$$

式中:  $\mathbf{f}_{A_i}$  为驱动副  $P_i$  及各自连接杆所受的驱动力;  $m_{A_i}$  为驱动副  $P_i$  及各自连接杆的质量之和;  $\mathbf{a}_{A_i}$  为驱动副  $P_i$  及其连接杆的加速度。

#### 3) 平行四边形长杆 $B_i C_i (i = 1, 2, 3)$

平行四边形机构的两长杆可等效为两短杆中点连线的转动杆  $B_i C_i$ , 则其合力矢量表示如下:

$$\mathbf{Q}_{B_i C_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{B_i C_i} \\ \mathbf{M}_{B_i C_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{B_i C_i} \mathbf{g} - m_{B_i C_i} \mathbf{a}_{B_i C_i} \\ -\mathbf{I}_{B_i C_i} \boldsymbol{\varepsilon}_{B_i C_i} - \boldsymbol{\omega}_{B_i C_i} \times (\mathbf{I}_{B_i C_i} \boldsymbol{\omega}_{B_i C_i}) \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中:  $m_{B_i C_i}$  为杆  $B_i C_i$  的质量;  $\mathbf{a}_{B_i C_i}$  为杆  $B_i C_i (i = 1, 2)$  的加速度;  $\mathbf{I}_{B_i C_i}$  为杆  $B_i C_i$  的惯性矩阵;  $\boldsymbol{\omega}_{B_i C_i}$  为杆  $B_i C_i$  的角速度;  $\boldsymbol{\varepsilon}_{B_i C_i}$  为杆  $B_i C_i$  的角加速度。

#### 4) 转动杆 $DC_3, B_{31} B_{32}$

杆  $DC_3, B_{31} B_{32}$  的合力矢量分别表示如下:

$$\mathbf{Q}_{DC_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{DC_3} \\ \mathbf{M}_{DC_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{DC_3} \mathbf{g} - m_{DC_3} \mathbf{a}_{DC_3} \\ -\mathbf{I}_{DC_3} \boldsymbol{\varepsilon}_{DC_3} - \boldsymbol{\omega}_{DC_3} \times (\mathbf{I}_{DC_3} \boldsymbol{\omega}_{DC_3}) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{Q}_{B_{31} B_{32}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{B_{31} B_{32}} \\ \mathbf{M}_{B_{31} B_{32}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} m_{B_{31} B_{32}} \mathbf{g} - m_{B_{31} B_{32}} \mathbf{a}_{B_{31} B_{32}} \\ -\mathbf{I}_{B_{31} B_{32}} \boldsymbol{\varepsilon}_{B_{31} B_{32}} - \boldsymbol{\omega}_{B_{31} B_{32}} \times (\mathbf{I}_{B_{31} B_{32}} \boldsymbol{\omega}_{B_{31} B_{32}}) \end{bmatrix} \quad (22)$$

式中:  $m_{DC_3}$  为杆  $DC_3$  的质量;  $\mathbf{a}_{DC_3}$  为杆  $DC_3$  的加速度;  $\mathbf{I}_{DC_3}$  为杆  $DC_3$  的惯性矩阵;  $\boldsymbol{\omega}_{DC_3}$  为杆  $DC_3$  的角速度;  $\boldsymbol{\varepsilon}_{DC_3}$  为杆  $DC_3$  的角加速度;  $m_{B_{31} B_{32}}$  为杆  $B_{31} B_{32}$  的质量;  $\mathbf{a}_{B_{31} B_{32}}$  为杆  $B_{31} B_{32}$  的加速度;  $\mathbf{I}_{B_{31} B_{32}}$  为杆  $B_{31} B_{32}$  的惯性矩阵;  $\boldsymbol{\omega}_{B_{31} B_{32}}$  为杆  $B_{31} B_{32}$  的角速度;  $\boldsymbol{\varepsilon}_{B_{31} B_{32}}$  为杆  $B_{31} B_{32}$  的角

加速度。

5) 移动杆  $C_{31}C_{32}$ 、 $C_1C_{22}$

杆  $C_{31}C_{32}$ 、 $C_1C_{22}$  的合力矢量分别表示如下:

$$Q_{C_{31}C_{21}} = \begin{bmatrix} F_{C_{31}C_{32}} \\ M_{C_{31}C_{32}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{C_{31}C_{32}}\mathbf{g} - m_{C_{31}C_{32}}\mathbf{a}_{C_{31}C_{32}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$Q_{C_1C_{22}} = \begin{bmatrix} F_{C_1C_{22}} \\ M_{C_1C_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{C_1C_{22}}\mathbf{g} - m_{C_1C_{22}}\mathbf{a}_{C_1C_{22}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (24)$$

式中:  $m_{C_{31}C_{32}}$  为杆  $C_{31}C_{32}$  的质量;  $\mathbf{a}_{C_{31}C_{32}}$  为杆  $C_{31}C_{32}$  的加速度;  $m_{C_1C_{22}}$  为杆  $C_1C_{22}$  的质量;  $\mathbf{a}_{C_1C_{22}}$  为杆  $C_1C_{22}$  的加速度。

### 5.3 动力学方程

对于 SKC<sub>1</sub>, 解除  $D$  处的约束, 于是支反力  $F_1$  转化为未知外力, 可得 SKC<sub>1</sub> 的动力学方程表示如下:

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{B_2C_2} & \delta\boldsymbol{\theta}_{B_2C_2} \end{bmatrix} Q_{B_2C_2} + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{C_1C_{22}} & 0 \end{bmatrix} Q_{C_1C_{21}} + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{B_1C_1} & \delta\boldsymbol{\theta}_{B_1C_1} \end{bmatrix} Q_{B_1C_1} + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{A_1} & 0 \end{bmatrix} Q_{A_1} + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{A_2} & 0 \end{bmatrix} Q_{A_2} - \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_D & 0 \end{bmatrix} [F_1 \ 0]^T = 0 \quad (25)$$

同理, 可得 SKC<sub>2</sub> 的动力学方程表示如下:

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{B_3C_3} & \delta\boldsymbol{\theta}_{B_3C_3} \end{bmatrix} Q_{B_3C_3} + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{DC_3} & \delta\boldsymbol{\theta}_{DC_3} \end{bmatrix} Q_{DC_3} + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{A_3} & 0 \end{bmatrix} Q_{A_3} + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{C_{31}C_{32}} & 0 \end{bmatrix} Q_{C_{31}C_{32}} + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{B_{31}B_{32}} & \delta\boldsymbol{\theta}_{B_{31}B_{32}} \end{bmatrix} Q_{B_{31}B_{32}} + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_P & \delta\boldsymbol{\theta}_P \end{bmatrix} Q_P + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_D & 0 \end{bmatrix} [F_1 \ 0]^T = 0 \quad (26)$$

式中:  $\delta\mathbf{x}_q$ ,  $\delta\boldsymbol{\theta}_q$  为移动虚位移和角度虚位移;  $q$  为各杆件参数标注。

### 5.4 数值仿真算例

设各构件均为规则、质量均匀的刚体, 各杆件的长度已在 2.4 节给出, 其质量参数为(单位: kg):

动平台质量  $m_p = 0.2424$ , 其余各杆质量分别为  $m_{A_1B_1} = 0.1144$ ,  $m_{A_2B_2} = 0.2612$ ,  $m_{A_3B_3} = 0.1044$ ,  $m_{B_1C_1} = m_{B_2C_2} = 0.2510$ ,  $m_{B_3C_3} = 0.3641$ ,  $m_{C_1C_{22}} = 0.3263$ ,  $m_{C_{31}C_{32}} = 0.2021$ 。

各杆件转动惯量如表 3 所示。

表 3 各杆件转动惯量参数(单位: kg/mm<sup>2</sup>)

Table 3 Moment of inertia parameters of each member

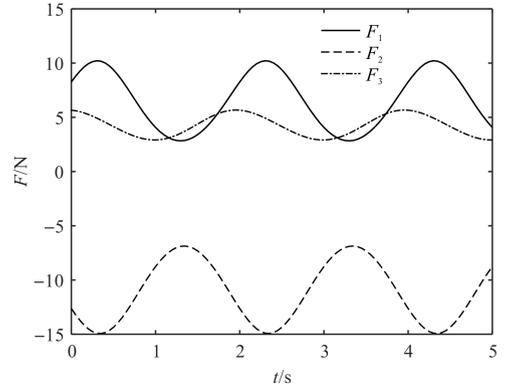
(unit: kg/mm<sup>2</sup>)

名称	$I_{xx}$	$I_{yy}$	$I_{zz}$
动平台	89.9164	89.8679	0.5042
杆件 $A_1B_1$	2.7765	2.0018	1.5802
杆件 $A_2B_2$	33.7187	30.9881	3.9118
杆件 $A_3B_3$	2.4484	1.9643	1.1742
杆件 $B_1B_1$ 、 $B_2B_2$	96.2961	96.1307	0.9930
杆件 $B_3B_3$	303.9333	303.7678	1.1966
杆件 $C_1C_{22}$	219.2296	219.0698	0.7457
杆件 $C_{31}C_{32}$	60.9449	60.8375	0.4651

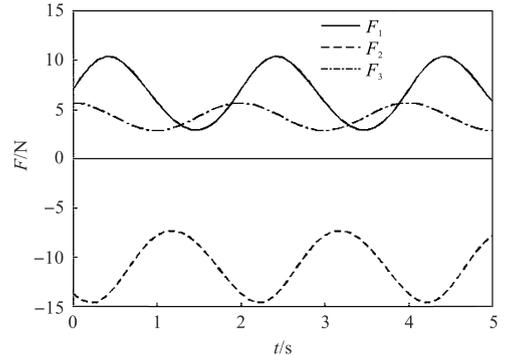
笔者仅考虑该机构承载 7 kg 载荷的情况, 且驱动副的运动规律与 2.4 节相同。

首先, 通过 MATLAB 计算式(25)、式(26), 得出理论曲线; 进一步, 在 ADAMS 软件中, 导入仿真模型如图 3(a) 所示, 并设定各构件的必要属性和约束关系, 施加重力  $g$ , 设步长为 0.01 s, 仿真时间为 5 s, 得出仿真曲线。

2T1R 并联机构驱动力曲线如图 8 所示。



(a) 驱动力理论变化曲线



(b) 驱动力仿真变化曲线

图 8 2T1R 并联机构驱动力曲线

Fig. 8 Driving force curve of 2T1R parallel mechanism

由图 8 可知: 该并联机构的驱动力理论与仿真曲线轨迹大致相同(相对误差 2% 以内), 可知动力学模型建立无误。

## 6 结束语

针对工业生产中既需要小范围精确作业, 又需要大范围单向操作的双重需求问题, 笔者设计了一种新型 2T1R 并联机构, 并对其进行了运动学位置分析和动力学分析, 计算得出了该机构的工作空间、奇异性、速度加速度以及 3 个驱动副所需要的驱动力。

研究表明:

1) 该机构耦合度为零, 具有符号式位置正解, 且部分运动解耦, 有利于机构后续的运动轨迹规划和控制的研究;

2) 部分工作空间具有各向同性, 机构具有良好操作性能, 可满足小范围精确作业和大范围长距离的操作要求;

3) 通过虚拟仿真, 验证了笔者研究中机构的理论速度、加速度以及动力学模型的正确性(相对误差 2% 以内)。同时, 根据驱动力曲线分析可知, 机构运动平稳。

后续, 笔者将进一步研究机构动力学的惯性力全域性等指标, 为研制样机提供技术参考。

## 参考文献 (References):

- [1] 边 辉, 刘艳辉, 梁志成, 等. 并联 2-RRR/UPRR 踝关节康复机器人机构及其运动学[J]. 机器人, 2010, 32(1): 6-12.  
BIAN Hui, LIU Yan-hui, LIANG Zhi-cheng, et al. A novel 2-RRR/UPRR robot mechanism for ankle rehabilitation and its kinematics[J]. Robot, 2010, 32(1): 6-12.
- [2] 牛雪梅, 高国琴, 刘辛军, 等. 三自由度驱动冗余并联机构动力学建模与试验[J]. 农业工程学报, 2013, 29(16): 31-41.  
NIU Xue-mei, GAO Guo-qin, LIU Xin-jun, et al. Dynamics modeling and experimental of 3-DOF parallel mechanism with actuation redundancy[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Engineering(Transactions of the CSAE), 2013, 29(16): 31-41.
- [3] WANG J, LIU X. Analysis of a novel cylindrical 3-DOF parallel robot[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2003, 42(1): 31-46.
- [4] 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.  
YANG Ting-li. Topological Structure of Robot Mechanism[M]. Beijing: China Machine Press, 2004.
- [5] KONG X W, GOSSELINC M. Type synthesis of 3-DOF PPR-equivalent parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2005, 127(6): 1113-1121.
- [6] 杨 宁, 马履中, 艾永强, 等. 两平移—转动并联机构型综合研究[J]. 机械设计与研究, 2005, 21(5): 29-32.  
YANG Ning, MA Lu-zhong, AI Yong-qiang, et al. Study on structural synthesis of two translation and one rotation parallel mechanism[J]. Machine Design and Research, 2005, 21(5): 29-32.
- [7] REFAAT S, NAHAVANDI S, TRINA A, et al. Asymmetrical three-DOFs rotational-translational parallel kinematics mechanisms based on Lie group theory[J]. European Journal of Mechanics, A/Soilds, 2006, 25(3): 550-558.
- [8] 张彦斌, 吴 鑫, 刘宏昭, 等. 无奇异完全各向同性 2T1R 型并联机构的结构综合[J]. 中国机械工程, 2008, 35(3): 277-281.  
ZHANG Yan-bin, WU Xin, LIU Hong-zhao, et al. Structure synthesis singularity-free fully-isotropic parallel mechanism with 2T1R-type[J]. China Mechanical Engineering, 2008, 35(3): 277-281.
- [9] 吴 鑫, 陈美丽, 张彦斌. 2T1R 并联机构位置及奇异性分析[J]. 农业机械学报, 2010, 41(2): 208-213.  
WU Xin, CHEN Mei-li, ZHANG Yan-bin. Analysis of position and singularity of 2T1R parallel mechanism[J].

Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(2): 208-213.

- [10] 邓嘉鸣, 许 可, 赵迎春, 等. 无寄生运动非对称空间 2T1R 并联机构设计与运动学分析[J]. 农业机械学报, 2018, 49(6): 408-417.  
DENG Jia-ming, XU Ke, ZHAO Ying-chun, et al. Design and kinematic analysis of parallel mechanism 2T1R with non-parasitic motion[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(6): 408-417.
- [11] 沈惠平, 周金波, 尤晶晶, 等. 具有解析式位置正解的 2T1R 并联机构运动性能分析[J]. 农业机械学报, 2020, 51(1): 398-409.  
SHEN Hui-ping, ZHOU Jin-bo, YOU Jing-jing, et al. Motion performance analysis of 2T1R parallel mechanism with positive analytical position solution[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 51(1): 398-409.
- [12] TRUNKK D, THANH et al. Dynamics identification of cinematically redundant parallel robots using the direct search method[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 55(5): 104-121.
- [13] CHENG G, SHAN X. Dynamic analysis of a parallel hip joint simulator with four degrees of freedoms(3R1T)[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 70(4): 2475-2486.
- [14] ZHANG X, CHEN Z. Dynamic analysis of a 3-RRR parallel mechanism with multiple clearance joints[J]. Mechanism & Machine Theory, 2014, 78(5): 105-115.
- [15] 贾晓辉, 田延岭, 张大卫. 基于虚功原理的 3-RRPR 柔性精密定位工作台动力学分析[J]. 机械工程学报, 2011, 47(1): 68-74.  
JIA Xiao-hui, TIAN Yan-ling, ZHANG Da-wei. Dynamic analysis of 3-RRPR flexible precision positioning table based on virtual work principle[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(1): 68-74.
- [16] 黄凯伟, 沈惠平, 李 菊, 等. 一种具有符号式位置正解的部分运动解耦空间 2T1R 并联机构拓扑设计与动力学建模[J]. 中国机械工程, 2022, 33(2): 160-169.  
HUANG Kai-wei, SHEN Hui-ping, LI Ju, et al. Topology design and dynamic modeling of partially kinematic decoupling space 2T1R parallel mechanism with positive symbolic position solution[J]. China Mechanical Engineering, 2022, 33(2): 160-169.
- [17] 沈惠平, 熊 坤, 孟庆梅, 等. 并联机构运动解耦设计方法与应用研究[J]. 农业机械学报, 2016, 47(6): 348-356.  
SHEN Hui-ping, XIONG Kun, MENG Qing-Mei, et al. Research on design method and application of kinematic decoupling of parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(6): 348-356.
- [18] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京: 科学出版社, 2012.  
YANG Ting-li, LIU An-xin, LUO Yu-feng, et al. Topology of robot mechanism[M]. Beijing: Science Press, 2012.
- [19] 沈惠平. 机器人机构拓扑特征运动学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.  
SHEN Hui-ping. Topological feature kinematics of robot mechanism[M]. Beijing: Higher Education Press, 2021.

## 本文引用格式:

耿宗海, 李 菊, 沈惠平, 等. 新型两平移—转动并联机构的拓扑设计及性能分析[J]. 机电工程, 2023, 40(12): 1931-1938.

GENG Zonghai, LI Ju, SHEN Huiping, et al. Topological design and performance analysis of a new type 2T1R parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2023, 40(12): 1931-1938.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>