

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2023.08.012

一种位置正解符号化且运动部分解耦的新型 2T1R 并联机构动力学分析*

杜中秋¹, 沈惠平^{1*}, 李 菊¹, 李 涛¹, 吴广磊²

(1. 常州大学 现代机构学研究中心, 江苏 常州 213164; 2. 大连理工大学 机械工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要:三自由度并联机构具有结构简单、造价低、运动控制方便,以及刚度高、承载能力大等特点,目前在工业生产等设备中得到了广泛应用,而其中具有移动和转动混合运动的 2T1R 并联机构具有更高的研究价值。为了研发和推广 2T1R 并联机构,提出了一种零耦合度且运动部分解耦的空间 2T1R 并联机构。首先,对该机构的位置正解进行了分析,并求解了各构件速度与输入速度之间的关系矩阵;然后,运用基于虚功原理的序单开链法,按照机构拓扑结构分解的顺序,分别建立了各子运动链(SKC)的动力学模型,从而得到了整个机构的逆向动力学模型;最后,对建立的动力学模型进行了算例研究,得到了机构的驱动力和 2 个 SKC 连接处的支反力,并将其与基于 ADAMS 的虚拟仿真结果进行了对比。研究表明:该 2T1R 并联机构具有部分运动解耦的优点,且通过仿真对比验证了所建立的逆向动力学模型的有效性和正确性,可为其结构设计和样机研制奠定基础。

关键词:并联机构;方位特征方程;逆向动力学;虚功原理;机构动力学建模;运动学建模

中图分类号:TH112

文献标识码:A

文章编号:1001-4551(2023)08-1231-09

Dynamics analysis of a new 2T1R parallel mechanism with symbolic position solutions and partially motion decoupled

DU Zhong-qiu¹, SHEN Hui-ping¹, LI Ju¹, LI Tao¹, WU Guang-lei²

(1. Research Center for Advanced Mechanisms, Changzhou University, Changzhou 213164, China; 2. School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Three-degree-of-freedom parallel mechanism has the characteristics of simple structure, low cost, convenient motion control, high stiffness and large bearing capacity, and it has been widely used in industrial production and other equipment, among which 2T1R parallel mechanism with mixed movement and rotation has higher research value. In order to develop and popularize the application of 2T1R parallel mechanism (PM), a spatial 2T1R PM with zero coupling degree and partially decoupled motion was proposed. Firstly, the forward and inverse solutions of the PM were analyzed, and the relation matrix between the velocity of each component and the input velocity was solved. Then, the dynamic models of each sub kinematic chain (SKC) were established using the order single open chain method based on the virtual work principle; and according to the order of the topological structure decomposition of the mechanism, the inverse dynamic model of the entire mechanism was obtained. Finally, an example study was carried out on the established dynamic model, and the driving force of the PM and the support and reaction force at the connection of two SKC were obtained, which were compared with the results of ADAMS virtual simulation. The results show that the 2T1R parallel mechanism has the advantage of partial motion decoupling, and the effectiveness and correctness of the established reverse dynamics model are verified by simulation comparison, which lays a foundation for its structural design and prototype development.

Key words: parallel mechanism(PM); position orientation characteristic equation; reverse dynamics; principle of virtual work; mechanism dynamics modeling; kinematics modeling

收稿日期:2023-02-03

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51975062)

作者简介:杜中秋(1996-),男,江苏宿迁人,硕士研究生,主要从事并联机器人方面的研究。E-mail:duzq1028@163.com

通信联系人:沈惠平,男,博士,教授,博士生导师。E-mail:shp65@126.com

0 引 言

因其具有结构简单、造价低、运动控制方便,以及刚度高、承载能力大等特点,目前,三自由度的并联机构在工业生产抓取、定位操作、娱乐、调姿等设备中得到了广泛应用^[1-2]。而其中具有移动和转动混合运动的 2T1R 并联机构具有更高的研究价值^{[3]5-6}。不少学者对该类型并联机构进行了相关的拓扑学和运动学研究^[4-6]。因为动力学是机构学研究的重要组成部分,所以对机构进行动态分析和高精度实时控制至关重要^{[7]1-2,[8]}。

目前,常用的动力学建模方法主要有^{[8]1-2}:拉格朗日(Lagrange)法、牛顿-欧拉(Newton-Euler)法、虚功原理、凯恩(Kane)法等。

基于 Lagrange 方程,白志富等人^[9]建立了一种三自由度的并联机构的动力学模型,计算推导出了驱动力的显示解。同样基于 Lagrange 方程,陈修龙等人^[10]建立了 4-UPS-RPU 4 自由度冗余驱动并联机构的动力学模型。郝秀清等人^[11]运用 Newton-Euler 法,分析了并联机构各构件的受力情况,推导出了 3PTT 并联机构的动力学方程。李永刚等人^[12]采用 Newton-Euler 法,建立了 3-RPS 机构的刚体动力学方程,并预设了机构动平台的轨迹,且在施加载荷的情况下,计算了并联机构的驱动力。赵晓东等人^[13]将达朗伯原理与虚功原理相结合,建立了 3-RPUR 并联机构的动力学模型。宋小科等人^[14]运用虚功原理,建立了含约束支链的 4PUS-1RPU 并联机构的动力学模型。李新友等人^[15]采用 Kane 法,建立了 3UPS/S 并联机构的动力学模型,并分析了机构动平台的动力学特性。赵学洋等人^[16]分析了运动平台和各个驱动杆件的速度、加速度之间的关系,并且采用 Kane 法,建立了 3-TPT 并联机构的动力学模型。

在上述动力学建模方法中:1) Lagrange 法主要是从动能和势能角度建立动力学模型,因此,对于多构件系统的应用而言,该方法计算量大,且无法计算关节处的支反力;2) Newton-Euler 法通过单独分析各构件受力,建立动力学模型,该方法建模思路清晰,同样对于多构件系统的应用,该方法计算量也很大;3) 虚功原理是针对整个系统虚位移做功,建立动力学模型,该方法只需计算各构件速度雅可比矩阵及作用力,具有简单、高效的特点,但其无法计算主要关节处的支反力;4) Kane 法在建立动力学模型时,需要计算偏速度和偏角速度,其优点是公式简洁,无需计算加速度,同时适用于非完整约束系统,但其无法计算关节处的支反力。

杨廷力^{[17]197}提出了基于虚功原理的力分析序单开链法,以子运动链(SK)为基本单元,其一方面具有传统虚功原理计算简单的优点;另一面也可计算 SKC 连接处的支反力,这对机械结构的强度计算及其设计至关重要。黄凯伟等人^[18]设计了一种部分解耦且具有位置符号解的 2T1R 并联机构,并利用序单开链法,建立了并联机构的逆向动力学模型。SHEN H P 等人^[19]设计了一类具有解耦运动和符号式位置正解的 2T1R 并联机构,并利用序单开链法,分析了优化支链布置对机构动力学的影响。针对一种零耦合度的 2T1R 并联机构,汤耀等人^[20]用序单开链法,研究了选用不同广义坐标系对动力学建模的影响。

笔者提出一种零耦合度、位置正解符号化,且部分运动解耦的 2T1R 并联机构,利用序单开链法(基于虚功原理)建立其动力学模型,计算各构件的速度雅可比矩阵,建立逆向动力学模型;同时,计算 2 个 SKC 处的部分支反力,以期为该机构的样机研制及动力学优化奠定基础。

1 2T1R 并联机构的设计

根据基于方位特征(position orientation characteristic, POC)方程的并联机构拓扑设计方法,笔者设计了一种新型零耦合度 2T1R 并联机构^[21],如图 1 所示。

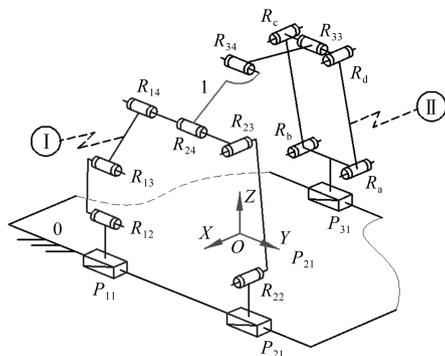


图 1 2T1R 并联机构简图

该并联机构由 2 条混合支链组成,其中,混合支链 I 中,由 $\{-P_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13} \parallel R_{14} -\}$ 与 $\{-P_{21} \perp R_{22} \parallel R_{23} -\}$ 并联后再串联一个 R_{24} 组成;混合支链 II 中,由 P_{31} 副与 4R 平行四边形结构 Pa 与 $\{-R_{33} \parallel R_{34} -\}$ 子链串联而成,而 R_{24} 和 R_{34} 连接动平台 1 的两侧,且 $R_{24} \parallel R_{34}$ 。

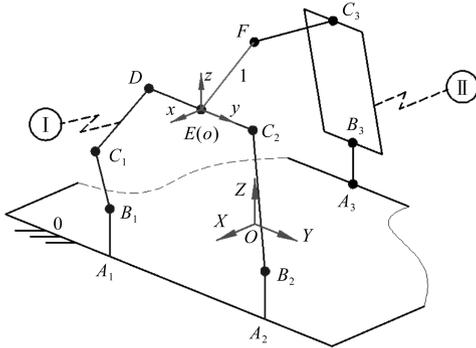
由拓扑分析易知,该机构的动平台 1 可以产生 2T1R 的运动输出;同时,该机构包含 2 个子运动链 SKC,即 $P_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13} \parallel R_{14} \perp R_{23} \parallel R_{22} \perp P_{21}$; $P_{31} - Pa - R_{33} \parallel R_{34}$,且根据文献[3]中耦合度计算公式,经计算

表明:其耦合度 $\kappa=0$,该机构的运动学位置容易求解,易得到符号式位置正解。

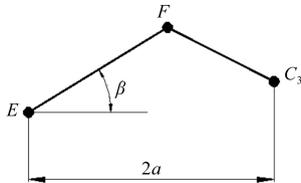
2 运动学建模分析

2.1 位置分析

机构的运动学建模如图 2 所示。



(a) 机构的结构参数及其标注



(b) E-F-C₃在xoz面的投影

图 2 运动学建模

位置正解为:已知驱动副 P_{11} 、 P_{21} 、 P_{31} ,输入量 y_1 、 y_2 、 y_3 ,求动平台 1 位置 $o(x, y, z)$ 及姿态角 β 。

设静平台两侧导轨之间的距离为 $2a$,静坐标系原点位于两导轨中心线上的一个定点。同时,设 $A_i B_i = l_1, i=1, 2, 3, B_1 C_1 = C_1 D = l_2, DE = EC_2 = l_3, B_2 C_2 = l_4, B_3 C_3 = l_5, C_3 F = l_6, EF = l_7$,动平台的姿态角为 β 。

机构的位置正解可分别在 SKC_1 和 SKC_2 中进行求解。

1) SKC_1 中的位置正解

易知: $A_1 = (a, y_1, 0), A_2 = (a, y_2, 0), B_1 = (a, y_1, l_1), B_2 = (a, y_2, l_2), D = (a, y_1, z), C_2 = (a, y_1 + 2l_3, z), E = o = (a, y_1 + l_3, z)$ 。

由杆长约束条件 $B_2 C_2 = l_4$,可得:

$$z = l_1 \pm \sqrt{l_4^2 - (y_1 + 2l_3 - y_2)^2} \quad (1)$$

2) SKC_2 中的位置正解

易知: $A_3 = (-a, y_3, 0), B_3 = (-a, y_3, l_1)$ 。

由题设可知,两侧移动副导轨之间的距离为 $2a$,将该机构中的 E-F-C₃ 向 xoz 面投影,如图 2(b) 所示。

显然,可以知道:

$$F = (a - l_7 \cos\beta, y_1 + l_3, z + l_7 \sin\beta);$$

$$C_3 = (-a, y_1 + l_3, z_{c3})。$$

由杆长约束条件 $B_3 C_3 = l_5$,可得:

$$z_{c3} = l_1 \pm \sqrt{l_5^2 - (y_1 + l_3 - y_3)^2} \quad (2)$$

又根据杆长约束条件 $C_3 F = l_6$,可得:

$$\beta = 2\arctan \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B + C} \quad (3)$$

其中: $A = 2(z - z_{c3})l_7, B = -4al_7, C = l_6^2 - 4a^2 - l_7^2 - (z - z_{c3})^2$ 。

至此,动平台 1 位置 $o(x, y, z)$ 及姿态角 β 均已解出,如下:

$$\begin{cases} x = a \\ y = y_1 + l_3 \\ z = l_1 \pm \sqrt{l_4^2 - (y_1 + 2l_3 - y_2)^2} \\ \beta = 2\arctan \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B + C} \end{cases} \quad (4)$$

由式(4)易知:该 2T1R 机构不仅有符号式位置正解,而且具有部分运动解耦性,即输出端点的 y 值仅由输入量 y_1 决定, z 值仅由 y_1 和 y_2 决定, β 由 y_1, y_2, y_3 共同确定,因此,机构的实时控制和运动轨迹规划较为容易。

机构的位置逆解可分别通过拓扑分析和杆长约束 $B_3 C_3 = l_5; C_3 F = l_6$ 解得,故这里不再赘述。

2.2 速度与加速度分析

2.2.1 动平台上基点 E 的速度与加速度分析

设机构动平台基点 E 的输出速度 $v = [\dot{y} \quad \dot{z} \quad \dot{\beta}]^T$,驱动副的输入速度 $\dot{\rho} = \dot{y} = [\dot{y}_1 \quad \dot{y}_2 \quad \dot{y}_3]^T$,则对混合支链 I 满足杆长约束 $DE = l_3, B_2 C_2 = l_4$ 和混合支链 II 满足杆长约束 $C_3 F = l_6$ 的位置方程全微分后可表示为:

$$J_o v = -J_i \dot{\rho} \quad (5)$$

其中:

$$J_o = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}, J_i = - \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix};$$

$$f_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2(y_1 - y), f_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, f_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial \beta} = 0;$$

$$f_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2(y_2 - y - l_3), f_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial z} = -2(l_1 - z), f_{23} =$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta} = 0; f_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{2(z_{c3} - z_F)(y_3 - y)}{\sqrt{l_5^2 - (y - y_3)^2}}, f_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial \beta} =$$

$$-2l_7 \sin\beta(-2a + l_7 \cos\beta) - 2l_7 \cos\beta(z_{c3} - z_F), f_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial z} =$$

$$-2(z_{c3} - z_F); g_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 2(y_1 - y), g_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = 2(y_2 - y - l_3), g_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial y_3} = \frac{2(z_{c3} - z_F)(y - y_3)}{\sqrt{l_5^2 - (y - y_3)^2}}.$$

机构非奇异时, J_o 可逆, 由式(5)可得:

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_o^{-1} \mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (6)$$

对式(6)中时间 t 求导可得:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{J}_o^{-1} \mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{J}_o^{-1} [\mathbf{K}_0] \quad (7)$$

其中: $\mathbf{K}_1 = \frac{df_{11}}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{df_{12}}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{df_{13}}{dt} \frac{d\beta}{dt} - \frac{dg_{11}}{dt} \frac{dy_1}{dt}$, $\mathbf{K}_2 =$

$$\frac{df_{21}}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{df_{22}}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{df_{23}}{dt} \frac{d\beta}{dt} - \frac{dg_{22}}{dt} \frac{dy_2}{dt}, \mathbf{K}_3 = \frac{df_{31}}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{df_{32}}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{df_{33}}{dt} \frac{d\beta}{dt} - \frac{dg_{33}}{dt} \frac{dy_3}{dt}.$$

为了便于后续计算, 需要将动平台 1 基点 E 的速度矩阵分解为平移速度矩阵和转动速度矩阵, 即:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}_1 \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{J}_x \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{G}_2 \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{J}_w \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (9)$$

$$\text{其中: } \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2.2 各杆件的速度和加速度

1) 杆件 $A_i B_i$ 的速度与加速度

点 B_i 的速度为:

$$\mathbf{V}_{B_i} = \mathbf{V}_{A_i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (l_i \mathbf{C}_{A_i B_i}) \quad (10)$$

式中: \mathbf{V}_{A_i} 为移动副 P_{i1} 的线速度; $\boldsymbol{\omega}_i$ 为杆 $A_i B_i$ 的角速度; $\mathbf{C}_{A_i B_i}$ 为杆 $A_i B_i$ 的单位矢量; 因驱动杆 $A_i B_i$ 仅存在移动, 故 $\boldsymbol{\omega}_i = 0$ 。

将式(10)两边对时间 t 求导可得:

$$\mathbf{a}_{B_i} = \mathbf{a}_{A_i} \quad (11)$$

式中: \mathbf{a}_{A_i} 为移动驱动副 P_{i1} 的加速度。

于是, 杆件 $A_i B_i = l_i, i = 1, 2, 3$, 质心的速度和加速度分别为:

$$\mathbf{V}_{A_i B_i} = \mathbf{V}_{B_i} = \mathbf{V}_{A_i}, \mathbf{a}_{A_i B_i} = \mathbf{a}_{B_i} = \mathbf{a}_{A_i} \quad (12)$$

2) 杆件 $B_1 C_1$ 的速度与加速度

点 C_1 的速度为:

$$\mathbf{V}_{C_1} = \mathbf{V}_{B_1} + \boldsymbol{\omega}_{C_1 B_1} \times (l_2 \mathbf{C}_{B_1 C_1}) \quad (13)$$

两边又乘 $\mathbf{C}_{B_1 C_1}$ 得:

$$\boldsymbol{\omega}_{C_1 B_1} = \frac{\mathbf{C}_{B_1 C_1} \times (\mathbf{V}_{C_1} - \mathbf{V}_{B_1})}{l_2} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{B_1 C_1} (\mathbf{V}_{C_1} - \mathbf{V}_{B_1})}{l_2} \quad (14)$$

式中: $\mathbf{C}_{B_1 C_1}$ 为杆件 $B_1 C_1$ 的单位矢量; $\tilde{\mathbf{C}}_{B_1 C_1}$ 为 $\mathbf{C}_{B_1 C_1}$ 的斜对称矩阵。

将式(13)两边对时间 t 求导, 可得:

$$\mathbf{a}_{C_1} = \mathbf{a}_{B_1} + l_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{C_1 B_1} \times \mathbf{C}_{B_1 C_1} + l_2 \boldsymbol{\omega}_{C_1 B_1} \times (\boldsymbol{\omega}_{C_1 B_1} \times \mathbf{C}_{B_1 C_1}) \quad (15)$$

对式(15)两边又乘 $\mathbf{C}_{B_1 C_1}$, 得杆件 $B_1 C_1$ 的角加速度为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{C_1 B_1} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{B_1 C_1} (\mathbf{a}_{C_1} - \mathbf{a}_{B_1})}{l_2} \quad (16)$$

由式(13)和式(15)可知, 杆 $B_1 C_1$ 质心的速度和加速度分别为:

$$\mathbf{V}_{B_1 C_1} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{B_1} + \mathbf{V}_{C_1}), \mathbf{a}_{B_1 C_1} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{B_1} + \mathbf{a}_{C_1}) \quad (17)$$

3) 杆 $C_1 D$ 的速度与加速度

点 D 的速度为:

$$\mathbf{V}_D = \mathbf{V}_{C_1} + \boldsymbol{\omega}_{DC_1} \times (l_2 \mathbf{C}_{C_1 D}) \quad (18)$$

两边又乘 $\mathbf{C}_{C_1 D}$ 得:

$$\boldsymbol{\omega}_{DC_1} = \frac{\mathbf{C}_{C_1 D} \times (\mathbf{V}_D - \mathbf{V}_{C_1})}{l_2} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{C_1 D} (\mathbf{V}_D - \mathbf{V}_{C_1})}{l_2} \quad (19)$$

式中: $\mathbf{C}_{C_1 D}$ 为杆件 $C_1 D$ 的单位矢量; $\tilde{\mathbf{C}}_{C_1 D}$ 为 $\mathbf{C}_{C_1 D}$ 的斜对称矩阵。

将式(18)两边对时间 t 求导, 可得:

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_{C_1} + l_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{DC_1} \times \mathbf{C}_{C_1 D} + l_2 \boldsymbol{\omega}_{DC_1} \times (\boldsymbol{\omega}_{DC_1} \times \mathbf{C}_{C_1 D}) \quad (20)$$

对式(20)两边又乘 $\mathbf{C}_{C_1 D}$, 得杆件 $C_1 D$ 的角加速度为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{DC_1} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{C_1 D} (\mathbf{a}_D - \mathbf{a}_{C_1})}{l_2} \quad (21)$$

由式(18)和式(20)可知, 杆 $C_1 D$ 质心的速度和加速度分别为:

$$\mathbf{V}_{C_1 D} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{C_1} + \mathbf{V}_D), \mathbf{a}_{C_1 D} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{C_1} + \mathbf{a}_D) \quad (22)$$

4) 杆 $B_2 C_2$ 的速度与加速度

点 C_2 的速度为:

$$\mathbf{V}_{C_2} = \mathbf{V}_{B_2} + \boldsymbol{\omega}_{C_2 B_2} \times (l_4 \mathbf{C}_{B_2 C_2}) \quad (23)$$

两边又乘 $\mathbf{C}_{B_2 C_2}$ 得:

$$\boldsymbol{\omega}_{C_2 B_2} = \frac{\mathbf{C}_{B_2 C_2} \times (\mathbf{V}_{C_2} - \mathbf{V}_{B_2})}{l_4} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{B_2 C_2} (\mathbf{V}_{C_2} - \mathbf{V}_{B_2})}{l_4} \quad (24)$$

式中: $\mathbf{C}_{B_2 C_2}$ 为杆件 $B_2 C_2$ 的单位矢量; $\tilde{\mathbf{C}}_{B_2 C_2}$ 为 $\mathbf{C}_{B_2 C_2}$ 的斜对称矩阵。

将式(23)两边对时间 t 求导, 可得:

$$\mathbf{a}_{C_2} = \mathbf{a}_{B_2} + l_4 \boldsymbol{\varepsilon}_{C_2 B_2} \times \mathbf{C}_{B_2 C_2} + l_4 \boldsymbol{\omega}_{C_2 B_2} \times (\boldsymbol{\omega}_{C_2 B_2} \times \mathbf{C}_{B_2 C_2}) \quad (25)$$

对式(25)两边叉乘 $\mathbf{C}_{B_2C_2}$, 得杆件 B_2C_2 的角加速度为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{C_2B_2} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{B_2C_2}(\mathbf{a}_{C_2} - \mathbf{a}_{B_2})}{l_4} \quad (26)$$

由式(23)和式(25)可知, 杆 B_2C_2 质心的速度和加速度分别为:

$$\mathbf{V}_{B_2C_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{B_2} + \mathbf{V}_{C_2}), \mathbf{a}_{B_2C_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{B_2} + \mathbf{a}_{C_2}) \quad (27)$$

5) 杆 DC_2 的速度与加速度

因杆 DC_2 只在 $yoze$ 面做二维移动, 故 $V_D = V_E = V_{C_2}$, $a_D = a_E = a_{C_2}$ 。

杆 DE 质心的速度和加速度分别为:

$$\mathbf{V}_{DC_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_D + \mathbf{V}_E), \mathbf{a}_{DC_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_D + \mathbf{a}_E) \quad (28)$$

6) 平行四边形构件中各杆的速度和加速度

笔者将平行四边形构件中的两长杆运动等效为杆件 B_3C_3 , 然后进行分析, 可知 C_3 点的速度为:

$$\mathbf{V}_{C_3} = \mathbf{V}_{B_3} + \boldsymbol{\omega}_{C_3B_3} \times (l_5 \mathbf{C}_{B_3C_3}) \quad (29)$$

两边叉乘 $\mathbf{C}_{B_3C_3}$ 得:

$$\boldsymbol{\omega}_{C_3B_3} = \frac{\mathbf{C}_{B_3C_3} \times (\mathbf{V}_{C_3} - \mathbf{V}_{B_3})}{l_5} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{B_3C_3}(\mathbf{V}_{C_3} - \mathbf{V}_{B_3})}{l_5} \quad (30)$$

式中: $\mathbf{C}_{B_3C_3}$ 为杆件 B_3C_3 的单位矢量; $\tilde{\mathbf{C}}_{B_3C_3}$ 为 $\mathbf{C}_{B_3C_3}$ 的斜对称矩阵。

将式(29)两边对时间 t 求导, 可得:

$$\mathbf{a}_{C_3} = \mathbf{a}_{B_3} + l_5 \boldsymbol{\varepsilon}_{C_3B_3} \times \mathbf{C}_{B_3C_3} + l_5 \boldsymbol{\omega}_{C_3B_3} \times (\boldsymbol{\omega}_{C_3B_3} \times \mathbf{C}_{B_3C_3}) \quad (31)$$

对式(31)两边叉乘 $\mathbf{C}_{B_3C_3}$, 得杆件 B_3C_3 的角加速度为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{C_3B_3} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{B_3C_3}(\mathbf{a}_{C_3} - \mathbf{a}_{B_3})}{l_5} \quad (32)$$

由式(29)和式(31)可知, 杆 B_3C_3 质心的速度和加速度分别为:

$$\mathbf{V}_{B_3C_3} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{B_3} + \mathbf{V}_{C_3}), \mathbf{a}_{B_3C_3} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{B_3} + \mathbf{a}_{C_3}) \quad (33)$$

平行四边形短杆的质心速度和加速度分别和点 C_3 对应的速度和加速度相等。

7) 杆 C_3F 的速度和加速度

点 F 的速度为:

$$\mathbf{V}_F = \mathbf{V}_{C_3} + \boldsymbol{\omega}_{FC_3} \times (l_6 \mathbf{C}_{C_3F}) \quad (34)$$

两边叉乘 \mathbf{C}_{C_3F} 得:

$$\boldsymbol{\omega}_{FC_3} = \frac{\mathbf{C}_{C_3F} \times (\mathbf{V}_F - \mathbf{V}_{C_3})}{l_6} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{C_3F}(\mathbf{V}_F - \mathbf{V}_{C_3})}{l_6} \quad (35)$$

式中: \mathbf{C}_{C_3F} 为杆件 C_3F 的单位矢量; $\tilde{\mathbf{C}}_{C_3F}$ 为 \mathbf{C}_{C_3F} 的斜对称矩阵。

将式(34)两边对时间 t 求导, 可得:

$$\mathbf{a}_F = \mathbf{a}_{C_3} + l_6 \boldsymbol{\varepsilon}_{FC_3} \times \mathbf{C}_{C_3F} + l_6 \boldsymbol{\omega}_{FC_3} \times (\boldsymbol{\omega}_{FC_3} \times \mathbf{C}_{C_3F}) \quad (36)$$

对式(36)两边叉乘 \mathbf{C}_{C_3F} , 得杆件 C_3F 的角加速度为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{FC_3} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{C_3F}(\mathbf{a}_F - \mathbf{a}_{C_3})}{l_6} \quad (37)$$

由式(34)和式(36)可知, 杆 C_3F 质心的速度和加速度分别为:

$$\mathbf{V}_{C_3F} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_F + \mathbf{V}_{C_3}), \mathbf{a}_{C_3F} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_F + \mathbf{a}_{C_3}) \quad (38)$$

8) 动平台 1 质心的速度和加速度

动平台 1 的速度和加速度为:

$$\mathbf{V}_{EF} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_F), \mathbf{a}_{EF} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_E + \mathbf{a}_F) \quad (39)$$

动平台 1 的角速度和角加速度为:

$$\boldsymbol{\omega}_{FE} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{EF}(\mathbf{V}_F - \mathbf{V}_E)}{l_7}, \boldsymbol{\varepsilon}_{FE} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{EF}(\mathbf{a}_F - \mathbf{a}_E)}{l_7} \quad (40)$$

2.2.3 速度雅可比矩阵

机构中各运动副连接处的速度和加速度, 均可由运动学各点的坐标分别对时间 t 求导数得到。

1) 杆件 $A_iB_i = l_1$ 的速度雅可比矩阵

杆件 $A_iB_i = l_1, i = 1, 2, 3$, 分别为驱动杆, 且为移动驱动, 因此有:

$$\mathbf{V}_{A_i} = \mathbf{V}_{B_i} = \mathbf{J}_{vA_iB_i} \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (41)$$

$$\text{其中: } \mathbf{J}_{vA_1B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_{vA_2B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{vA_3B_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

2) 平行四边形结构中杆件的速度雅可比矩阵

由式(30)和式(33)可知:

$$\boldsymbol{\omega}_{C_3B_3} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{B_3C_3}(\mathbf{V}_{C_3} - \mathbf{V}_{B_3})}{l_5} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{B_3C_3}(\mathbf{J}_{vC_3} - \mathbf{J}_{vA_3B_3}) \dot{\boldsymbol{\rho}}}{l_5} = \mathbf{J}_{\omega C_3B_3} \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (42)$$

$$\mathbf{V}_{B_3C_3} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{B_3} + \mathbf{V}_{C_3}) = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_{vA_3B_3} + \mathbf{J}_{vC_3}) \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{J}_{vB_3C_3} \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (43)$$

3) 杆件 C_3F 的速度雅可比矩阵

点 C_3 、 F 的速度分别为: $\mathbf{v}_{C_3} = \mathbf{J}_{vC_3} \dot{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{v}_F = \mathbf{G}_F \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\rho}} =$

$J_{vF}\dot{\rho}$ 。

$$\text{其中: } \mathbf{G}_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_7 \sin\beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l_7 \cos\beta \end{bmatrix}, \mathbf{J}_{vC_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ Q_1 & 1 & Q_2 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \frac{y_3 - y}{\sqrt{l_5^2 - (y - y_3)^2}}, Q_2 = \frac{y - y_3}{\sqrt{l_5^2 - (y - y_3)^2}}。$$

因此有:

$$\omega_{FC_3} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{C_3F}(\mathbf{V}_F - \mathbf{V}_{C_3})}{l_6} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{C_3F}(\mathbf{J}_{vF} - \mathbf{J}_{vC_3})\dot{\rho}}{l_6} = \mathbf{J}_{wFC_3}\dot{\rho} \quad (44)$$

$$\mathbf{V}_{C_3F} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_F + \mathbf{V}_{C_3}) = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_{vF} + \mathbf{J}_{vC_3})\dot{\rho} = \mathbf{J}_{vC_3F}\dot{\rho} \quad (45)$$

4) 动平台 1 的速度雅可比矩阵

由式(39)和式(40)可知:

$$\omega_{FE} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{EF}(\mathbf{V}_F - \mathbf{V}_E)}{l_7} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{EF}(\mathbf{J}_{vF} - \mathbf{J}_x)\dot{\rho}}{l_7} = \mathbf{J}_{wFE}\dot{\rho} \quad (46)$$

$$\mathbf{V}_{EF} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_F) = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_x + \mathbf{J}_{vF})\dot{\rho} \quad (47)$$

5) 杆件 B_1C_1 的速度雅可比矩阵

点 C_1 的速度为: $\mathbf{v}_{C_1} = \mathbf{G}_{C_1}\mathbf{J}\dot{\rho} = \mathbf{J}_{vC_1}\dot{\rho}$ 。

$$\text{其中: } \mathbf{G}_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 & Q_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = \frac{-(z_E - l_1)/2}{2\sqrt{l_2^2 - (z_E - l_1)^2/4}}。$$

由式(14)和式(17)可知:

$$\omega_{C_1B_1} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{B_1C_1}(\mathbf{V}_{C_1} - \mathbf{V}_{B_1})}{l_2} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{B_1C_1}(\mathbf{J}_{vC_1} - \mathbf{J}_{vA_1B_1})\dot{\rho}}{l_2} = \mathbf{J}_{wC_1B_1}\dot{\rho} \quad (48)$$

$$\mathbf{V}_{B_1C_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{B_1} + \mathbf{V}_{C_1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_{vA_1B_1} + \mathbf{J}_{vC_1})\dot{\rho} = \mathbf{J}_{vB_1C_1}\dot{\rho} \quad (49)$$

6) 杆件 C_1D 的速度雅可比矩阵

点 D 的速度为: $\mathbf{v}_D = \mathbf{J}_x\dot{\rho}$ 。

由式(19)和式(22)可知:

$$\omega_{DC_1} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{C_1D}(\mathbf{V}_D - \mathbf{V}_{C_1})}{l_2} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{C_1D}(\mathbf{J}_x - \mathbf{J}_{vC_1})\dot{\rho}}{l_2} = \mathbf{J}_{wDC_1}\dot{\rho} \quad (50)$$

$$\mathbf{V}_{C_1D} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{C_1} + \mathbf{V}_D) = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_{vC_1} + \mathbf{J}_x)\dot{\rho} = \mathbf{J}_{vC_1D}\dot{\rho} \quad (51)$$

7) 杆件 B_2C_2 的速度雅可比矩阵

点 C_2 的速度为 $\mathbf{v}_{C_2} = \mathbf{J}_x\dot{\rho}$ 。

由式(24)和式(27)可知:

$$\omega_{C_2B_2} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{B_2C_2}(\mathbf{V}_{C_2} - \mathbf{V}_{B_2})}{l_4} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{B_2C_2}(\mathbf{J}_x - \mathbf{J}_{vA_2B_2})\dot{\rho}}{l_4} = \mathbf{J}_{wC_2B_2}\dot{\rho} \quad (52)$$

$$\mathbf{V}_{B_2C_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{B_2} + \mathbf{V}_{C_2}) = \frac{1}{2}(\mathbf{J}_{vA_2B_2} + \mathbf{J}_x)\dot{\rho} = \mathbf{J}_{vB_2C_2}\dot{\rho} \quad (53)$$

3 机构的动力学建模

3.1 基于虚功原理的序单开链法

对自由度为 f 、广义速度为 $\dot{q}_{(f)} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f]^T$ 的机械系统,基于单开链(single open chain, SOC)的机构组成原理^{[17]197},是将其分成若干个子运动链(SK),而每一个子运动链又可拓扑分解为若干个单开链 $SOC(\Delta_j^+)$, $SOC(\Delta_j^0)$, $SOC(\Delta_j^-)$;假定解除原系统若干个运动副的 k 个约束后,解除的运动副支反力将转化为作用在新系统构件上的未知外力。相对应新系统增加的广义速度记作 $\dot{q}_{(k)} = [\dot{q}_{(f+1)}, \dot{q}_{(f+2)}, \dots, \dot{q}_{(f+k)}]^T$ 。

笔者按照上述拓扑结构分解的逆序,对各单开链进行动力学分析。由单开链之间的约束关系和虚功原理可知:在理想约束下,外力(矩)和惯性力(矩)在机械系统的任何虚位移上的元功之和等于零^{[17]199},即可建立各 SK 的动力学分析方程。

3.2 受力分析

由拓扑分析可知,该并联机构由 2 个耦合度均为 0 的子运动链(SK)组成,故可分别在 SK₁、SK₂ 内对各杆件进行受力分析。

3.2.1 SK2 内各构件受力分析

1) 动平台

取动平台的质心为 p 点,则:

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{M}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p + m_p \mathbf{g} - m_p \mathbf{a}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_p - I_p \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\omega}_1 \times (I_p \boldsymbol{\omega}_1) \end{bmatrix} \quad (54)$$

式中: $\mathbf{f}_p, \boldsymbol{\tau}_p$ 为动平台所受的外力和外力矩; m_p 为动平台的质量; \mathbf{g} 为重力加速度; $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1$ 为动平台 1 的角速度和角加速度; I_p 为坐标系 $O-XYZ$ 下动平台 1 的惯量矩阵; $\mathbf{F}_p, \mathbf{M}_p$ 为动平台所受的力和力矩。以下公式(55)~式(63)中字符含义类似。

2) 移动滑块 A_3B_3

$\mathbf{Q}_{A_3B_3}$ 表达式为:

$$\mathbf{Q}_{A_3B_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{A_3B_3} \\ \mathbf{M}_{A_3B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{A_3B_3} + m_{A_3B_3}\mathbf{g} - m_{A_3B_3}\mathbf{a}_{A_3} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (55)$$

式中: $m_{A_3B_3}$ 为滑块 A_3B_3 的质量; $\mathbf{f}_{A_3B_3}$ 为滑块 A_3B_3 上的驱动力。

其中: $\mathbf{K} = [0 \ 0 \ 0]^T$ 。

3) 转动杆 B_3C_3

在平行四边形结构中,其短杆输出为一维平移,故其两长杆具有相同的速度。因此,需要将两长杆等效为一个转动杆 B_3C_3 ,即:

$$\mathbf{Q}_{B_3C_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{B_3C_3} \\ \mathbf{M}_{B_3C_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{B_3C_3}\mathbf{g} - m_{B_3C_3}\mathbf{a}_{B_3C_3} \\ -\mathbf{I}_{B_3C_3}\boldsymbol{\varepsilon}_{C_3B_3} - \boldsymbol{\omega}_{C_3B_3} \times (\mathbf{I}_{B_3C_3}\boldsymbol{\omega}_{C_3B_3}) \end{bmatrix} \quad (56)$$

式中: $m_{B_3C_3}$ 为杆 B_3C_3 的质量; $\mathbf{I}_{B_3C_3}$ 为坐标系 $O-XYZ$ 下杆 B_3C_3 的惯量矩阵。

4) 平行四边形短杆

由于平行四边形的短杆只产生平行移动,故有:

$$\mathbf{Q}_{R_cR_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{R_cR_d} \\ \mathbf{M}_{R_cR_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{R_cR_d}\mathbf{g} - m_{R_cR_d}\mathbf{a}_{C_3} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (57)$$

式中: $m_{R_cR_d}$ 为平行四边形短杆 R_cR_d 的总质量。

5) 转动杆 C_3F

\mathbf{Q}_{C_3F} 表达式为:

$$\mathbf{Q}_{C_3F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{C_3F} \\ \mathbf{M}_{C_3F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{C_3F}\mathbf{g} - m_{C_3F}\mathbf{a}_{u_4} \\ -\mathbf{I}_{C_3F}\boldsymbol{\varepsilon}_{FC_3} - \boldsymbol{\omega}_{FC_3} \times (\mathbf{I}_{C_3F}\boldsymbol{\omega}_{FC_3}) \end{bmatrix} \quad (58)$$

式中: m_{C_3F} 为杆 C_3F 的质量; \mathbf{I}_{C_3F} 为坐标系 $O-XYZ$ 下杆 C_3F 的惯量矩阵。

3.2.2 SKC1 内各杆件受力分析

1) 杆件 DC_2

由于杆件 DE 、 EC_2 均在 YOZ 面运动,且两杆同轴线,不发生相对转动,故这里将杆件 DE 和杆件 EC_2 视为同一杆件 DC_2 :

$$\mathbf{Q}_{DC_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{DC_2} \\ \mathbf{M}_{DC_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{DC_2}\mathbf{g} - m_{DC_2}\mathbf{a}_{DC_2} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (59)$$

式中: m_{DC_2} 为杆件 DE 和杆件 EC_2 的总质量。

2) 驱动滑块 A_iB_i

\mathbf{Q}_{C_3F} 表达式为:

$$\mathbf{Q}_{A_iB_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{A_iB_i} \\ \mathbf{M}_{A_iB_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{A_iB_i} + m_{A_iB_i}\mathbf{g} - m_{A_iB_i}\mathbf{a}_{A_i} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}, i = 1, 2 \quad (60)$$

式中: $m_{A_iB_i}$ 为滑块 A_iB_i 的质量; $\mathbf{f}_{A_iB_i}$ 为滑块 A_iB_i 上的驱动力。

3) 杆件 B_1C_1

$\mathbf{Q}_{B_1C_1}$ 表达式为:

$$\mathbf{Q}_{B_1C_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{B_1C_1} \\ \mathbf{M}_{B_1C_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{B_1C_1}\mathbf{g} - m_{B_1C_1}\mathbf{a}_{B_1C_1} \\ -\mathbf{I}_{B_1C_1}\boldsymbol{\varepsilon}_{C_1B_1} - \boldsymbol{\omega}_{C_1B_1} \times (\mathbf{I}_{B_1C_1}\boldsymbol{\omega}_{C_1B_1}) \end{bmatrix} \quad (61)$$

式中: $m_{B_1C_1}$ 为杆 B_1C_1 的质量; $\mathbf{I}_{B_1C_1}$ 为坐标系 $O-XYZ$ 下杆 B_1C_1 的惯量矩阵。

4) 杆件 C_1D

\mathbf{Q}_{C_1D} 表达式为:

$$\mathbf{Q}_{C_1D} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{C_1D} \\ \mathbf{M}_{C_1D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{C_1D}\mathbf{g} - m_{C_1D}\mathbf{a}_{C_1D} \\ -\mathbf{I}_{C_1D}\boldsymbol{\varepsilon}_{DC_1} - \boldsymbol{\omega}_{DC_1} \times (\mathbf{I}_{C_1D}\boldsymbol{\omega}_{DC_1}) \end{bmatrix} \quad (62)$$

式中: m_{C_1D} 为杆 D_1C_1 的质量; \mathbf{I}_{C_1D} 为坐标系 $O-XYZ$ 下杆 C_1D 的惯量矩阵。

5) 转动杆 B_2C_2

$\mathbf{Q}_{B_2C_2}$ 表达式为:

$$\mathbf{Q}_{B_2C_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{B_2C_2} \\ \mathbf{M}_{B_2C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{B_2C_2}\mathbf{g} - m_{B_2C_2}\mathbf{a}_{B_2C_2} \\ -\mathbf{I}_{B_2C_2}\boldsymbol{\varepsilon}_{C_2B_2} - \boldsymbol{\omega}_{C_2B_2} \times (\mathbf{I}_{B_2C_2}\boldsymbol{\omega}_{C_2B_2}) \end{bmatrix} \quad (63)$$

式中: $m_{B_2C_2}$ 为杆 B_2C_2 的质量; $\mathbf{I}_{B_2C_2}$ 为坐标系 $O-XYZ$ 下杆 B_2C_2 的惯量矩阵。

3.3 动力学方程的建立

笔者解除运动副 R_{24} 的约束,即 E 处的约束,得到 SKC₁、SKC₂, 2 个子系统,于是,支反力 F_E 转化为作用在 2 个子系统构件上的未知外力。笔者根据序单开链法(基于虚功原理),分别在 SKC₁、SKC₂ 中建立其动力学方程。

SKC₂ 的动力学方程为:

$$[\delta\mathbf{X}_{A_3B_3}] \mathbf{Q}_{A_3B_3} + [\delta\mathbf{X}_{B_3C_3}] \mathbf{Q}_{B_3C_3} + [\delta\mathbf{X}_{C_3F}] \mathbf{Q}_{C_3F} + [\delta\mathbf{X}_p] \mathbf{Q}_p - [\delta\mathbf{X}_{DC_2}] \cdot [\mathbf{F}_E]^T = 0 \quad (64)$$

而 SKC₁ 的动力学方程为:

$$[\delta\mathbf{X}_{A_1B_1}] \mathbf{Q}_{A_1B_1} + [\delta\mathbf{X}_{A_2B_2}] \mathbf{Q}_{A_2B_2} + [\delta\mathbf{X}_{B_1C_1}] \mathbf{Q}_{B_1C_1} + [\delta\mathbf{X}_{C_1D}] \mathbf{Q}_{C_1D} + [\delta\mathbf{X}_{B_2C_2}] \mathbf{Q}_{B_2C_2} + [\delta\mathbf{X}_{DC_2}] \cdot [\mathbf{F}_E]^T = 0 \quad (65)$$

其中: $\delta\mathbf{X}_{A_iB_i} = \mathbf{J}_{vA_iB_i} \delta\mathbf{q}$ ($i = 1, 2, 3$), $\delta\mathbf{X}_{C_3F} = \mathbf{J}_{vC_3F} \delta\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{X}_{B_iC_i} = \mathbf{J}_{vB_iC_i} \delta\mathbf{q}$ ($i = 1, 2, 3$), $\delta\mathbf{X}_p = \mathbf{J}_{vp} \delta\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{X}_{DC_2} = \mathbf{J}_x \delta\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{X}_{C_1D} = \mathbf{J}_{vC_1D} \delta\mathbf{q}$, $\delta\boldsymbol{\theta}_{C_3F} = \mathbf{J}_{wC_3F} \delta\mathbf{q}$, $\delta\boldsymbol{\theta}_{B_iC_i} = \mathbf{J}_{wB_iC_i} \delta\mathbf{q}$ ($i = 1, 2, 3$), $\delta\boldsymbol{\theta}_p = \mathbf{J}_{wp} \delta\mathbf{q}$, $\delta\boldsymbol{\theta}_{C_1D} = \mathbf{J}_{wC_1D} \delta\mathbf{q}$ 。

式中: $\delta\mathbf{X}$ 、 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 为移动虚位移和角度虚位移; F_E 为 E 处支反力。

将式(16) ~ 式(47)代入式(48) ~ 式(56),即可求出驱动力 $f_{A_i B_i}$ ($i = 1, 2, 3$)以及SKC连接副 E 处的支反力 F_E 。

3.4 驱动力计算实例

3.4.1 杆件参数

笔者设计的2T1R机构具有以下特点:1)耦合度为零;2)具有符号式位置正解;3)有部分运动解耦性。因此,上述机构具有潜在工程应用价值。例如:在物流分拣应用领域,可以利用该机构两平移的运动特性实现YOZ面上物品的长距离运输;同时,当物品到达特定地点时,再利用其一转动的特性,进行物品的装卸。

基于上述假设的应用场景,笔者对该并联机构结构参数进行初步设计: $a = 300$ mm, $l_1 = 100$ mm, $l_2 = 200$ mm, $l_3 = 160$ mm, $l_4 = 400$ mm, $l_5 = 320$ mm, $l_6 = 240$ mm, $l_7 = 500$ mm。

假设取3个驱动副 P_{11} 、 P_{21} 、 P_{31} 的输入函数分别为: $y_1 = 20\sin(\pi t)$, $y_2 = -10\sin(\pi t)$, $y_3 = 20\sin(\pi t)$ 。

机构中各杆件的质量分别为: $m_{A_i B_i} = 0.0728$ kg, $m_{A_3 B_3} = 0.1241$ kg, $m_{B_1 C_1} = 0.0764$ kg, $m_{C_1 D} = 0.0763$ kg, $m_{B_2 C_2} = 0.1394$ kg, $m_{D C_2} = 0.0947$ kg, $m_{B_3 C_3} = 0.1141$ kg, $m_{Rc Rd} = 0.0512$ kg, $m_{C_3 F} = 0.0890$ kg, $m_{EF} = 0.6590$ kg。

各杆件的转动惯量如表1所示。

表1 各杆件的转动惯量参数 (单位:kg/m²)

名称	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
动平台1	0.1747	0.1804	0.0189
杆件 $B_1 C_1$	0.0073	0.0126	0.0144
杆件 $C_1 D$	0.0140	0.0192	0.0144
杆件 $B_2 C_2$	0.0169	0.0238	0.0183
杆件 $B_3 C_3$	0.0143	0.0175	0.0174
杆件 $C_3 F$	0.0211	0.0257	0.0059

3.4.2 驱动力求解

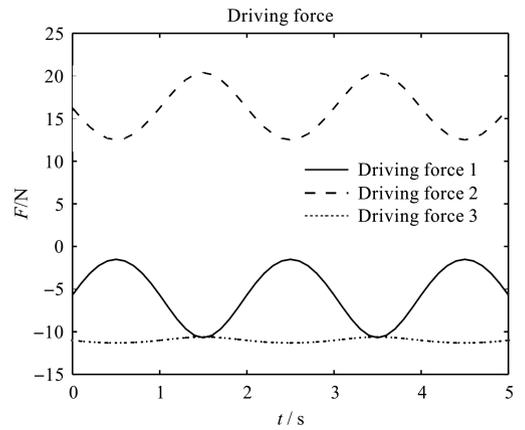
笔者将以上参数代入动力学方程式(54) ~ 式(65),在负载为3 kg状态下,运用MATLAB计算(忽略摩擦时)该机构的驱动力;同时,将虚拟样机导入ADAMS中进行仿真(运动仿真时间为5 s)。

驱动力曲线如图3所示。

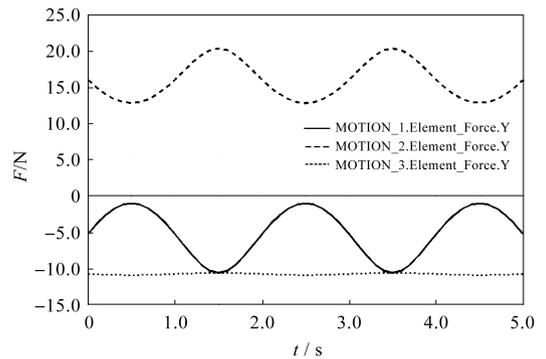
对比图3(a, b)可知:驱动力理论计算曲线与ADAMS仿真曲线基本一致,仅存在细微差距,故可证明笔者所建立的动力学模型是正确的。

当解除点 E 处的约束时,支反力 F_E 转化为未知外力,根据式(64)可得点 E 处的Y、Z方向的支反力变化曲线,如图4所示。

同理,对比 E 点处的理论计算值与ADAMS仿真值,发现两者一致,误差很微小,故可证明 E 点处支反

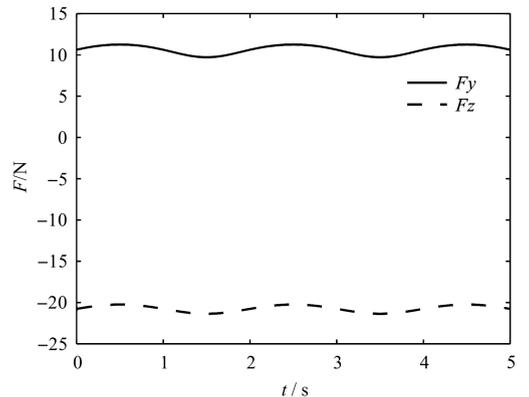


(a) 驱动力理论曲线

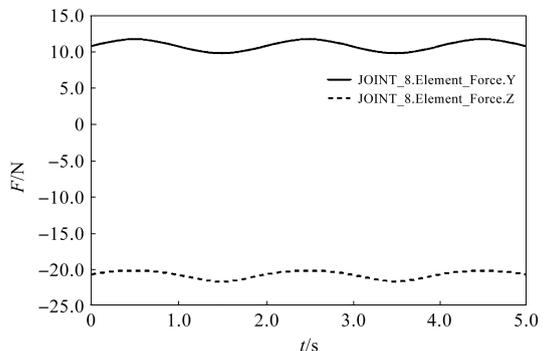


(b) 驱动力仿真曲线

图3 驱动力曲线



(a) E点处支反力理论曲线



(b) E点处支反力仿真曲线

图4 E点处支反力曲线

力计算是正确的。

笔者设计的2T1R机构,其结构上由2个耦合度

均为零的SKC组成,而动力学建模也是基于SKC拓扑分解顺序进行的,故得到了2个独立的动力学方程式(64)、式(65)。

从动力学方程式可以发现,式中包含了E点处的支反力,且可以通过两式之和建立整个系统的动力学方程。

4 结束语

三自由度并联机构具有结构简单、造价低、运动控制方便、承载能力大等优点,目前得到了广泛应用,而其中具有移动和转动混合运动的2T1R并联机构则有更高的研究价值。为了研发和推广2T1R并联机构,笔者提出了一种新型2T1R并联机构,并对其进行了运动学位置分析和动力学分析,计算得到了3个驱动副的驱动力和子运动链连接处的支反力。

研究表明:

1)所设计的2T1R并联机构,其耦合度为零,具有符号式位置正解,且具有运动解耦性,这些特性有利于对机构进行实时控制和运动轨迹规划;

2)基于位置分析方法,对机构进行了速度加速度分析,得到了各杆件的速度雅可比矩阵;

3)根据基于虚功原理的序单开链法,按照机构拓扑分解的顺序,分别建立了2个SKC的动力学模型。当机构在负载为3 kg状态下时,根据所建立的动力学模型,得到了所需的驱动力,及其2个SKC连接处的支反力,并利用ADAMS软件对建立的虚拟样机进行了仿真,证明了该动力学模型的正确性。

笔者采用序单开链法(基于虚功原理),对所设计的机构进行了动力学建模,其建模过程没有考虑运动副的间隙、摩擦等因素的影响。因此,在后续的研究工作中,将进一步研究该类因素造成的误差,为样机的研制与应用提供技术参考。

参考文献(References):

[1] 沈惠平,周金波,尤晶晶,等.具有解析式位置正解的2T1R并联机构运动性能分析[J].农业机械学报,2020,51(1):398-409.
[2] SHEN H, CHABLAT D, ZENG B, et al. A translational three-degrees-of-freedom parallel mechanism with partial motion decoupling and analytic direct kinematics[J]. Journal of Mechanisms and Robotics,2020,12(2):1-7.

[3] 沈惠平.机器人机构拓扑特征运动学[M].北京:高等教育出版社,2021.
[4] YANG Ting-li, LIU An-xin, SHEN Hui-ping, et al. Topology Design of Robot Mechanisms[M]. Springer,2018.
[5] QU Shu-wei, LI Rui-qin, BAI Shao-ping, et al. Type synthesis of 2T1R decoupled parallel mechanisms based on Lie groups and screw theory[J]. Mathematical Problems in Engineering,2017,2017(7):1-11.
[6] BING L, YUAN C, DENG Z, et al. Conceptual design and analysis of the 2T1R mechanism for a cooking robot[J]. Robotics & Autonomous Systems,2011,59(2):74-83.
[7] 沈惠平,朱忠顺,孟庆梅,等.零耦合度空间2T1R并联机构运动学与刚度建模分析[J].农业机械学报,2020,51(10):411-420.
[8] 周金波,尤晶晶,李菊,等.具有符号式位置正解的2T1R并联机构逆向动力学分析[J].机械设计与研究,2020,36(3):23-29.
[9] 白志富,韩先国,陈五一.基于Lagrange方程三自由度并联机构动力学研究[J].北京航空航天大学学报,2004,30(1):51-54.
[10] 陈修龙,孙德才,王清.基于拉格朗日的冗余驱动并联机构刚体动力学建模[J].农业机械学报,2015,46(12):329-336.
[11] 郝秀清,胡福生,陈建涛.基于牛顿—欧拉法的3PTT并联机构动力学分析及仿真[J].中国机械工程,2006,17(S2):32-36.
[12] 李永刚,宋轶民,冯志友,等.基于牛顿欧拉法的3-RPS并联机构逆动力学分析[J].航空学报,2007,28(5):1210-1215.
[13] 赵晓东,丁文华,李仕华,等.新型3-RPUR并联机构的逆动力学分析[J].机械设计与研究,2009,25(5):17-19.
[14] 宋小科,杨晓钧.基于虚功原理的4PUS-1RPU并联机构动力学分析[J].组合机床与自动化加工技术,2012,52(6):25-30.
[15] 李新友,陈五一,韩先国.基于Kane方程的3UPS/S并联机构动力学研究[J].机床与液压,2011,39(13):1-5.
[16] 赵学洋,赵恒华,杨世彬,等.基于Kane方程的3-TPT并联机构动力学研究[J].机械传动,2016,40(1):36-39.
[17] 杨廷力.机械系统基本理论-结构学、运动学、动力学[M].北京:机械工业出版社,1996.
[18] 黄凯伟,沈惠平,李菊,等.一种具有部分运动解耦和符号式位置正解的空间2T1R并联机构拓扑设计与动力学建模[J].中国机械工程,2022,33(2):160-169.
[19] SHEN H P, TANG Y, WU G L, et al. Design and analysis of a class of two-limb non-parasitic 2T1R parallel mechanism with decoupled motion and symbolic forward position solution-influence of optimal arrangement of limbs onto the kinematics, dynamics and stiffness[J]. Mechanism and Machine Theory,2022,172(6):104815.
[20] 汤耀,沈惠平,曾博雄,等.一种零耦合度及部分运动解耦的空间2T1R并联机构动力学建模[J].常州大学学报:自然科学版,2022,34(1):48-59.
[21] 沈惠平,李菊,汤耀.一特征链—约束链大转角零耦合度两平移—转动操作手:CN202110173866.2[P].2021-08-31.

本文引用格式:

杜中秋,沈惠平,李菊,等.一种位置正解符号化且运动部分解耦的新型2T1R并联机构动力学分析[J].机电工程,2023,40(8):1231-1239.

DU Zhong-qiu, SHEN Hui-ping, LI Ju, et al. Dynamics analysis of a new 2T1R parallel mechanism with symbolic position solutions and partially motion decoupled[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2023,40(8):1231-1239.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>