

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2023.04.011

空间双激振器同轴反向回转振动系统自同步特性研究*

安兆喆, 张楠*

(北京建筑大学 城市轨道交通车辆服役性能保障北京市重点实验室, 北京 102616)

摘要:为了解决平面振动自同步模型无法适配复杂工况的问题,对双机驱动的同轴线反向回转振动系统的自同步特性进行了分析和研究。首先,分析了系统的受力情况,搭建了该系统的运动学模型,并应用 Lagrange 方程得出了系统的运动微分方程,利用平均法处理了电机转子的转速及相位,进一步计算得到了其稳态响应;然后,利用 Hamilton 原理分析了振动系统的稳态方程,经计算推导出了转子实现同步和稳定的两大条件;讨论了系统主要的结构参数和工作参数变化对系统同步性和稳定性的影响;最后,根据计算得出的数据,利用 MATLAB 搭建了力学模型,并借助 Simulink 对模型进行了仿真,验证了振动系统实现自同步的稳定性与可行性。研究表明:两电机在稳定工况下可以保持在同一转速,相对相位差不发生变化,稳定在 2 rad 左右;同时,当对系统内一台电机进行断电重连的操作时,该电机仍可以在 25 s 内达到正常工作电机的转速,两电机转子相位差依旧维持在 2.5 rad 附近,垂直振动轨迹只发生 ± 0.04 m 的偏移。该研究填补了空间振动系统缺少反向回转模型同步理论的情况,可以为类似振动同步研究打下基础。

关键词:振动机械;双机驱动同轴反向转动;自同步特性;偏心转子;稳定性条件;转子振动系统

中图分类号:TH113.1

文献标识码:A

文章编号:1001-4551(2023)04-0552-10

Self-synchronization of coaxial and reverse rotating vibration system with two motors

AN Zhao-zhe, ZHANG Nan

(Beijing Key Laboratory of Performance Guarantee on Urban Rail Transit Vehicles,
Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 102616, China)

Abstract: Aiming at the problem that the plane vibration self-synchronization model could not adapt to complex working conditions. The self-synchronization characteristics of the coaxial reverse rotation vibration system driven by two machines was analyzed and studied. Firstly, the force condition of the system was analyzed, the kinematics model of the system was built, the differential equation of motion of the system was obtained by using Lagrange equation, the speed and phase of the motor rotor were processed by using the average method, and the steady-state response was further calculated. Then, the steady-state equation of the vibration system was analyzed by using Hamilton principle, and two conditions for the synchronization and stability of the rotor were derived. The influence of the main structural parameters and working parameters of the system on the synchronization and stability of the system was discussed. Finally, according to the calculated data, the mechanical model was built by MATLAB and simulated by Simulink to verify the stability and feasibility of the self-synchronization of the vibration system. The experimental results show that the two motors can keep the same speed under stable working conditions, and the relative phase difference does not change, which is stable at about 2 rads. At the same time, when a motor in the system is disconnected and reconnected, the motor can still reach the speed of the normal working motor within 25 s, and the phase difference between the rotors of the two motors is still maintained around 2.5 rads, and the vertical vibration track is only offset by ± 0.04 m. It fills the lack of the theory of reverse rotation in the vibration system of space structures, and lays a foundation for the study of similar vibration synchronization.

Key words: vibrating machinery; dual coaxial reverse rotation; self-synchronization characteristics; eccentric rotor; stability condition; rotor vibration system

收稿日期:2022-06-26

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51605022);北京市教育委员会科技计划一般项目(KM202010016002)

作者简介:安兆喆(1997-),男,北京人,硕士研究生,主要从事机械振动及同步控制方面的研究。E-mail:anzhaozhe1113@163.com

通信联系人:张楠,女,博士,副教授,硕士生导师。E-mail:zhangnan@bucea.edu.cn

0 引言

机械的振动同步是指系统在若干个不同激振作用下,其频率达到统一的现象。随着科技不断进步,振动同步在工作生活中的应用越来越广泛,不仅可以应用于振动筛或沉桩机等大型振动机械上,还可以应用于医用振动按摩仪等小型精密仪器中。

早在 20 世纪 50 年代,同步理论的开拓者 BLEKHMANN^[1-3]就提出了运动分离理论,并在此基础上,建立了双电机的自同步模型。闻邦椿院士等人^[4,5]引入了平均法,将多机同步问题转化为激振器转矩负载多少的问题,为我国振动同步研究奠定了基础。

ZHAO Chun-yu 等人^[6,7]引入了小参数,与平均法相结合提出了小参数平均法,为振动系统的稳定性提供了判据,简化了多机同步繁琐的计算推导。ZHANG Xue-liang 等人^[8,9]利用了模拟分析、数值推算及实验测量等方式,验证了系统内在结构参数对同步性的影响,并通过理论分析证实了多机同步问题中的 Sommerfeld 现象。HOU Yong-jun 等人^[10]研究了振动同步中的能量平衡问题,并验证了能量变化对振动系统运动的影响。ZOU Min 等人^[11]研究了双频双机振动系统,并找到了使其实现自同步的苛刻条件。FANG Pan 等人^[12]引入了庞加莱法,验证了转子质量、电机频率等系统结构参数会对三电机耦合摆系统的动力学特性参数产生干扰。

但是上述研究都是针对于平面结构的振动同步模型,适用性严重受限,制约着振动机械的发展。

随着振动同步研究的深入,学者们的思维不再局限于平面内排布的振动系统模型,而是着手研究日常生活中经常出现的多平面空间振动同步问题。

ZHAO Chun-yu 等人^[13]研究了双机空间单质体振动模型的自同步问题,为空间振动自同步研究奠定了基础。MIKLOS A 等人^[14]研究了基于 PID 控制的双机空间振动系统,验证了这种控制方法对于电机的频率以及振幅具有较好的控制效果。陈晓哲等人^[15,16]研究了空间双机同轴线非连接同向转动振动系统的自同步理论,以及其自同步特性,推动了空间振动同步理论的发展。方潘等人^[17]提出了三机空间排布振动同步模型,并找到了其同步及稳定的条件,丰富了模型多样性,证明了多于两电机空间振动同步的可能性。

虽然振动同步研究领域在日益扩大,理论在逐渐完善,但激振器空间排布的相关模型及研究还很少,基于空间排布的转子反向回转振动同步理论更鲜有人研

究。但是这种振动模型更贴近实际工程中的复杂多变的情况,有很大的研究价值。

为了补充振动同步理论的空缺,促进振动同步理论在实际工程中的广泛应用,笔者着眼于双机同轴线空间排布,转子采用反向回转方式运动的振动系统,研究其自同步理论。

1 系统动力学模型

空间双机反向回转振动系统的力学模型主要结构包括:2 台同轴安装且转子反向旋转的激振电机、偏心转子以及质体和固定弹簧。

空间双机反向回转振动系统的力学模型如图 1 所示。

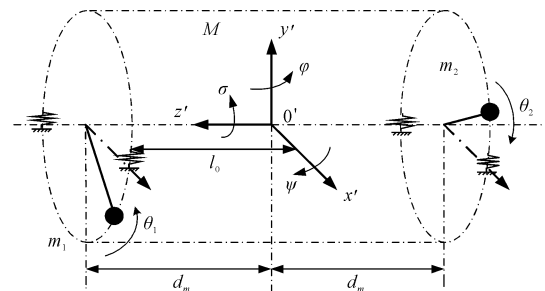


图1 双机同轴反向转动力学结构模型

图1中,两激振器沿相同轴线旋转时,其振动分别由质体M以及两个对称安装在M两侧的激振器中的转子 m_1 、 m_2 构成,在激振器作用下,电机驱动偏心转子做反向回转运动^[18],质体M由4个弹簧支撑固定,与地面相连。

假设振动过程中不存在锥形振动,通过动力学模型分析可以看出,以坐标系 oxy 为参考,系统会产生沿 x 轴的水平运动,沿 y 轴的竖直运动,因该系统为反向空间旋转结构,故与空间同向旋转模型相比会多产生一个转矩作用于机体,且其他方向的扭转扰动不可忽略,分别为绕 x 轴旋转的 ψ 运动,绕 y 轴旋转的 φ 运动,绕 z 轴旋转的 σ 运动,激振器转子 m_1 、 m_2 的绕电机轴的转动 θ_1 、 θ_2 ,故该系统有7个自由度。

分别以上述各参量作为广义坐标,可以得到:

质体质心坐标为:

$$x_M = (x \quad y \quad 0)^T \quad (1)$$

偏心转子位移可分别表示为:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + r \cdot \cos\theta_1 \\ x_2 &= x + r \cdot \cos\theta_2 \\ y_1 &= y + r \cdot \sin\theta_1 \\ y_2 &= y + r \cdot \sin\theta_2 \end{aligned} \quad (2)$$

式中: r —两转子的回转半径; θ_1 、 θ_2 —两转子的旋转

角度。

设转子回转中心与质体 M 质心的距离为 d_m , 则系统在震动过程中, 两转子任意位置的坐标可表示为:

$$\begin{aligned} x_{m1} &= [r \cdot \cos\theta_1 \quad r \cdot \sin\theta_1 \quad d_m]^T \\ x_{m2} &= [r \cdot \cos\theta_2 \quad r \cdot \sin\theta_2 \quad -d_m]^T \end{aligned} \quad (3)$$

系统坐标移动示意图如图 2 所示。

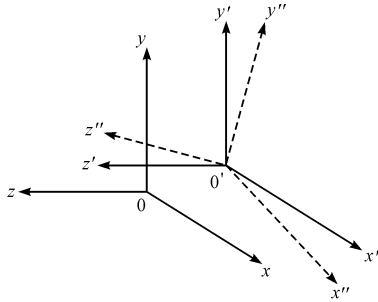


图 2 坐标系移动示意图

根据该坐标即可进一步推出转子在初始坐标系 oxy 中的坐标:

$$\begin{aligned} x_{m10} &= x_M + \mathbf{R}x_{m1} \\ x_{m20} &= x_M + \mathbf{R}x_{m2} \end{aligned} \quad (4)$$

式中: \mathbf{R} —变换矩阵。

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\psi \\ 0 & 1 & -\varphi \\ -\psi & \varphi & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

对振动系统进行动力学分析可得:

质体 M 势能为:

$$V_M = Mgy \quad (6)$$

偏心转子的重力势能和表示为:

$$V_m = 2mgy + mgr\sin\theta_1 + mgr\sin\theta_2 \quad (7)$$

弹簧的弹性势能为:

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{1}{4}K_x(x + l_0\psi)^2 + \frac{1}{4}K_x(x - l_0\psi)^2 + \\ &\frac{1}{4}K_y(x + l_0\varphi)^2 + \frac{1}{4}K_y(x - l_0\varphi)^2 + \\ &\frac{1}{2}K_\psi\psi^2 + \frac{1}{2}K_\varphi\varphi^2 + \frac{1}{2}K_\sigma\sigma^2 \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $K_x, K_y, K_\psi, K_\varphi, K_\sigma$ —弹簧在 x, y 方向上的刚度以及绕 x, y, z 轴扭转时产生的刚度; l_0 —弹簧支撑点到质体质心的水平长度。

系统总势能为:

$$\begin{aligned} V &= V_M + V_m + V_s = Mgy + 2mgy + \\ &mgr\sin\theta_1 + mgr\sin\theta_2 + \frac{1}{4}K_x(x + l_0\psi)^2 + \\ &\frac{1}{4}K_x(x - l_0\psi)^2 + \frac{1}{4}K_y(x + l_0\varphi)^2 + \\ &\frac{1}{4}K_y(x - l_0\varphi)^2 + \frac{1}{2}K_\psi\psi^2 + \frac{1}{2}K_\varphi\varphi^2 + \frac{1}{2}K_\sigma\sigma^2 \end{aligned} \quad (9)$$

同理, 质体 M 动能为:

$$T_M = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (10)$$

偏心转子的动能和表示为:

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1 + \dot{y}_1) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2 + \dot{y}_2) = \\ &\frac{1}{2}m[(\dot{x} - r \cdot \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1)^2 + (\dot{y} + r \cdot \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1)^2] + \\ &\frac{1}{2}m[(\dot{x} - r \cdot \sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2)^2 + (\dot{y} + r \cdot \cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2)^2] \end{aligned} \quad (11)$$

x 方向的转矩为:

$$T_x = \frac{1}{2}J_\varphi\dot{\varphi}^2 \quad (12)$$

式中: J_φ —质体相对于 x 轴的转动惯量。

y 方向的转矩为:

$$T_y = \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 \quad (13)$$

式中: J_ψ —质体相对于 y 轴的转动惯量。

z 方向的转矩为:

$$T_z = \frac{1}{2}J_\sigma\dot{\sigma}^2 \quad (14)$$

式中: J_σ —质体相对于 z 轴的转动惯量。

在计算中, 由于两电机安装距离并不远, 故取 $J_\psi = J_\varphi = J_\sigma = 2ml_s$ 。其中, l_s 为系统绕坐标原点的等效回转半径。

电机转矩为:

$$T_d = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 \quad (15)$$

其中, $J_1 = mr^2 + j_1; J_2 = mr^2 + j_2$ 。

式中: J_1, J_2 —两电机的转动惯量; j_1, j_2 —两电机轴的转动惯量。

故系统动能为:

$$\begin{aligned} T &= T_M + T_m + T_x + T_y + T_z + T_d = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \\ &\frac{1}{2}m[(\dot{x} - r \cdot \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1)^2 + (\dot{y} + r \cdot \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1)^2] + \\ &\frac{1}{2}m[(\dot{x} - r \cdot \sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2)^2 + (\dot{y} + r \cdot \cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2)^2] + \\ &\frac{1}{2}J_\varphi\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_\sigma\dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \quad (16)$$

系统的能量散逸函数可表示为:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}f_x\dot{x}^2 + \frac{1}{2}f_y\dot{y}^2 + \frac{1}{2}f_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}f_\varphi\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}f_\sigma\dot{\sigma}^2 + \\ &\frac{1}{4}f_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\psi})^2 + \frac{1}{4}f_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\psi})^2 \end{aligned} \quad (17)$$

式中: f_x —系统弹簧 x 向的阻尼系数, $N \cdot s/m$; f_y —系

统弹簧 y 向的阻尼系数, $N \cdot s/m$; f_ψ —系统弹簧绕 ψ 向扭转的阻尼系数, $N \cdot s \cdot m/rad$; f_φ —系统弹簧绕 φ 向扭转的阻尼系数, $N \cdot s \cdot m/rad$; f_σ —系统弹簧绕 σ 向扭转的阻尼系数, $N \cdot s \cdot m/rad$; f_i —电机的摩擦系数。

对于整个系统,其拉格朗日方程为:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (18)$$

式中: q_i —系统的广义坐标; Q_i —系统的广义力。

取 $x, y, \psi, \varphi, \sigma, \theta_1$ 及 θ_2 为广义坐标,系统的广义力有:

$$Q_i = \{Q_x, Q_y, Q_\psi, Q_\varphi, Q_\sigma, Q_{\theta_1}, Q_{\theta_2}\}^T;$$

$$Q_x = Q_y = Q_\psi = Q_\varphi = Q_\sigma = 0; Q_{\theta_i} = T_{ei} - f_i \dot{\theta}_i$$

对于 x 有:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{d \partial T}{\partial x} \quad (19)$$

将式(16)代入式(19),可得到:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = M\ddot{x} + m\ddot{x} - mrsin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + m\ddot{x} - mrsin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 \quad (20)$$

即:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\ddot{x} + 2m\ddot{x} - mr(\cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1) - mr(\cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + \sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2) \quad (21)$$

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial q_i} = \frac{\partial(T-V)}{\partial x} \quad (22)$$

将式(9,16)代入式(22),可得到:

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial x} = -K_x x - K_y x \quad (23)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \quad (24)$$

将式(17)代入式(24),得到:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = f_x \dot{x} \quad (25)$$

将以上3式代入拉格朗日方程,即可得到 x 方向系统运动微分方程:

$$M\ddot{x} + 2m\ddot{x} + K_x x + f_x \dot{x} = mr(\cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1) + mr(\cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + \sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2) \quad (26)$$

同理,可得到其他系统运动微分方程:

$$M\ddot{x} + 2m\ddot{x} + K_x x + f_x \dot{x} = mr(\cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1) + mr(\cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + \sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2),$$

$$M\ddot{y} + 2m\ddot{y} + K_y y + f_y \dot{y} = mr(\sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1) + mr(\sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + \cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2),$$

$$J_\psi \ddot{\psi} + f_\psi \dot{\psi} + k_\psi \psi = mrl_0(\sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 - \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1) -$$

$$mrl_0(\sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 - \cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2),$$

$$J_\varphi \ddot{\varphi} + f_\varphi \dot{\varphi} + k_\varphi \varphi = mrl_0(\cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 - \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1) - mrl_0(\cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 - \sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2),$$

$$J_\sigma \ddot{\sigma} + f_\sigma \dot{\sigma} + k_\sigma \sigma = -mrl_0(\sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 - \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1) + mrl_0(\sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 - \cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2),$$

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + f_1 \dot{\theta}_1 = T_{d1} - mr[\ddot{y}\cos\theta_1 - \ddot{x}\sin\theta_1 - l_0 \ddot{\varphi} \cos(\theta_1 - \omega) - l_0 \dot{\varphi}^2 \sin(\theta_1 - \omega)],$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + f_2 \dot{\theta}_2 = T_{d2} - mr[\ddot{y}\cos\theta_2 - \ddot{x}\sin\theta_2 - l_0 \ddot{\varphi} \cos(\theta_2 + \omega) - l_0 \dot{\varphi}^2 \sin(\theta_2 + \omega)] \quad (27)$$

2 系统同步理论及条件

振动机体上的两台激振器内偏心转子受电机控制,进行反向回转。设该系统内两激振器的偏心转子运动时的平均相位为 θ ,同时为方便计算,设两转子相对的平均相位差为 2α ,故有:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta + \alpha \\ \theta_2 = \theta - \alpha \end{cases} \quad (28)$$

系统达到稳态时,将两偏心转子的平均角速度规定为 ω_0 ,其在 T 周期内的表达式可写作:

$$\omega_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{\theta}_i(t) dt, (i = 1, 2) \quad (29)$$

由小参数法可知,在系统稳定运动时,任意周期内电机的角速度、角加速度与系统平均角速度存在函数关系: $\dot{\theta}_i = (1 + \varepsilon_i) \omega_0$, $\ddot{\theta}_i = \dot{\varepsilon}_i \omega_0$ ($i = 1, 2$),且稳定运动下小参数任意周期内平均值为0,故转子转速的二阶导对系统振动的影响非常微小,在计算时可以适当忽略掉。

将同步状态下系统前5个稳态方程进行简化处理,得到:

$$M\ddot{x} + 2m\ddot{x} + K_x x + f_x \dot{x} = mr\omega_0^2 [\cos(\theta + \alpha + \gamma_x) + \eta \cos(\theta - \alpha + \gamma_x)],$$

$$M\ddot{y} + 2m\ddot{y} + K_y y + f_y \dot{y} = mr\omega_0^2 [\sin(\theta + \alpha + \gamma_y) + \eta \sin(\theta - \alpha + \gamma_y)],$$

$$J_\psi \ddot{\psi} + f_\psi \dot{\psi} + k_\psi \psi = mrl_0 \omega_0^2 [\sin(\theta + \alpha + \gamma_\psi) - \eta \sin(\theta - \alpha + \gamma_\psi)],$$

$$J_\varphi \ddot{\varphi} + f_\varphi \dot{\varphi} + k_\varphi \varphi = mrl_0 \omega_0^2 [\cos(\theta + \alpha + \gamma_\varphi) - \eta \cos(\theta - \alpha + \gamma_\varphi)],$$

$$J_\sigma \ddot{\sigma} + f_\sigma \dot{\sigma} + k_\sigma \sigma = mrl_0 \omega_0^2 [-\sin(\theta + \alpha + \gamma_\sigma) + \eta \sin(\theta - \alpha + \gamma_\sigma)] (0 < \eta \leq 1) \quad (30)$$

其中, $\gamma_n = \arctan \frac{2\xi_n b_n}{1 - b_n^2}$; $b_n = \frac{\omega_n}{\omega_0}$ ($n = x, y, \psi, \varphi, \sigma$)。

系统各方向振动的固有频率及无量纲参数为:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \sqrt{\frac{K_x}{M+2m}}; \omega_y = \sqrt{\frac{K_y}{M+2m}}; \omega_\psi = \sqrt{\frac{K_\psi}{J_\psi}}; \\ \omega_\varphi &= \sqrt{\frac{K_\varphi}{J_\varphi}}; \omega_\sigma = \sqrt{\frac{K_\sigma}{J_\sigma}}; \xi_x = \frac{f_x}{2\sqrt{(M+2m)K_x}}; \\ \xi_y &= \frac{f_y}{2\sqrt{(M+2m)K_y}}; \xi_\psi = \frac{f_\psi}{2\sqrt{J_\psi K_\psi}}; \xi_\varphi = \frac{f_\varphi}{2\sqrt{J_\varphi K_\varphi}}; \\ \xi_\sigma &= \frac{f_\sigma}{2\sqrt{J_\sigma K_\sigma}}\end{aligned}$$

代入上式可得到系统振动位移响应:

$$\begin{aligned}x &= -\frac{rr_0}{\mu_x} [\cos(\theta + \alpha + \gamma_x) + \eta \cos(\theta - \alpha + \gamma_x)], \\ y &= -\frac{rr_0}{\mu_y} [\sin(\theta + \alpha + \gamma_y) + \eta \sin(\theta - \alpha + \gamma_y)], \\ \psi &= -\frac{rr_0 l_0}{\mu_\psi \left(\frac{J_\psi}{M+2m}\right)} [\sin(\theta + \alpha + \gamma_\psi) - \\ &\quad \eta \sin(\theta - \alpha + \gamma_\psi)], \\ \varphi &= -\frac{rr_0 l_0}{\mu_\varphi \left(\frac{J_\varphi}{M+2m}\right)} [\cos(\theta + \alpha + \gamma_\varphi) - \\ &\quad \eta \cos(\theta - \alpha + \gamma_\varphi)], \\ \sigma &= -\frac{rr_0 l_0}{\mu_\sigma \left(\frac{J_\sigma}{M+2m}\right)} [-\sin(\theta + \alpha + \gamma_\sigma) + \\ &\quad \eta \sin(\theta - \alpha + \gamma_\sigma)]\end{aligned}\quad (31)$$

$$\text{其中, } r_0 = \frac{m}{M}; \mu_n = \sqrt{(1-b_n^2)^2 + (2\xi_n b_n)^2}.$$

3 偏心转子同步条件

笔者将电机稳定运动时的偏心块旋转动能视为一定值,记作: $T_i (i=1,2)$ 。故系统稳态运动时的动能方程可简化为:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} J_\varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_\psi \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_\sigma \dot{\sigma}^2 + T_i \quad (32)$$

根据拉格朗日函数有: $L = T - V$ 。

将系统稳态解代入动能、势能表达式,得到当偏心转子旋转一周的时间 T 内,Hamilton 作用量为:

$$\begin{aligned}H &= \int_0^T L dt = \int_0^{2\pi} L d\varphi = \\ &\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} J_\sigma \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2} J_\varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_\psi \dot{\psi}^2 + T_i - \right. \\ &\left. \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_\varphi \varphi^2 + \frac{1}{2} k_\psi \psi^2 + \frac{1}{2} k_\sigma \sigma^2 \right] d\varphi \approx \\ &\frac{\pi}{2} [2\eta \omega_0^2 P \cos 2\alpha + (1 + \eta)^2 \omega_0^2 Q]\end{aligned}\quad (33)$$

其中,

$$\begin{aligned}P &= A_x^2 \mu_x M + B_y^2 \mu_y M - C_\psi^2 \mu_\psi M - D_\varphi^2 \mu_\varphi M - E_\sigma^2 \mu_\sigma M; \\ Q &= A_x^2 \mu_x M + B_y^2 \mu_y M + C_\psi^2 \mu_\psi M + D_\varphi^2 \mu_\varphi M + E_\sigma^2 \mu_\sigma M; \\ A_x &= -\frac{rr_0}{\mu_x}; B_y = -\frac{rr_0}{\mu_y}; C_\psi = -\frac{rr_0 l_0}{\mu_\psi \left(\frac{J_\psi}{M+2m}\right)}; \\ D_\varphi &= -\frac{rr_0 l_0}{\mu_\varphi \left(\frac{J_\varphi}{M+2m}\right)}; E_\sigma = -\frac{rr_0 l_0}{\mu_\sigma \left(\frac{J_\sigma}{M+2m}\right)}\end{aligned}$$

根据 Hamilton 原理可以求得其变分,以及作用在系统上所有非保守力做的虚功和在一个周期内的积分,这两者的和等于零,即:

$$\delta H + \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^2 (Q_i \delta q_i) d(\omega_0 t) \quad (34)$$

取 α 为广义坐标, $T_{ei} - f_i \dot{\varphi}_i$ 为广义力,则有:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^2 (Q_i \delta q_i) d(\omega_0 t) = 2\pi (Mg_1 - Mf_1 + Mg_2 - Mf_2) \quad (35)$$

将式(33)代入式(35),同时为简化分析,令 $\eta = 1$,可得:

$$\sin 2\alpha = 1/D \quad (36)$$

式中: D —系统同步能力指数,其表达式如下:

$$\begin{aligned}D &= \left| \frac{T_C}{T_L} \right| = \\ &\left| \frac{-2r_m \eta \left(\frac{\cos \gamma_x}{\mu_x} + \frac{\cos \gamma_y}{\mu_y} - r_\psi^2 \frac{\cos \gamma_\psi}{\mu_\psi} - r_\varphi^2 \frac{\cos \gamma_\varphi}{\mu_\varphi} \right)}{(1 + \eta^2) \left(\frac{\cos \gamma_x}{\mu_x} + \frac{\cos \gamma_y}{\mu_y} + r_\psi^2 \frac{\cos \gamma_\psi}{\mu_\psi} + r_\varphi^2 \frac{\cos \gamma_\varphi}{\mu_\varphi} \right)} \right| = \\ &\frac{2m^2 r^2}{\pi (Mg_1 - Mf_1 + Mg_2 - Mf_2)} \left\{ \left[\frac{\cos \gamma_x (m - k_x)}{\left(M - \frac{k_x}{\omega_0^2} \right)} \right]^2 + \right. \\ &\left. \left[\frac{\cos \gamma_y (m - k_y)}{\left(M - \frac{k_y}{\omega_0^2} \right)} \right]^2 + \left[\frac{\cos \gamma_\psi l_0 (J_m - k_\psi)}{\left(M - \frac{k_\psi}{\omega_0^2} \right)} \right]^2 \right\}^{-1}\end{aligned}\quad (37)$$

式中: T_C —同步力矩; α —两电机转速差。

要使得系统同步,则 $\sin 2\alpha$ 必有值,故有:

$$\begin{aligned}| \sin 2\alpha | &\leq 1 \\ |D| &\geq 1\end{aligned}\quad (38)$$

则振动系统的振动力矩大于等于该系统内两电机电磁转矩差,即同步能力系数 D 大于 1 时,为该型振动系统实现自同步的条件。

4 振动系统稳定性条件

判断该振动系统同步稳定性的方法即为求 Hamilton 作用量 H 关于 α 的二阶导,其结果大于 0 则

说明系统具有稳定性,即:

$$\frac{d^2H}{d\alpha^2} > 0 \quad (39)$$

代入 Hamilton 作用量 H 表达式,可得到:

$$\eta\omega_0^2 P \cos 2\alpha < 0 \quad (40)$$

已知 $\eta\omega_0^2 > 0$, 则:当 $P > 0$ 时,振动系统的稳定性条件为 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$; 当 $P < 0$ 时,振动系统的稳定性条件为 $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$; 当 $P = 0$ 时,振动系统无法实现同步。

5 仿真实验

5.1 数值分析

在仿真前,笔者先对系统同步性稳定性进行数值分析,讨论部分数值变化对系统的影响。

笔者给出的振动系统仿真常值参数如表 1 所示。

表 1 振动系统仿真参数

参数/单位	数值
M/kg	148
m_i/kg	3.5
$J/(\text{kg}/\text{m}^2)$	17
$J_i/(\text{kg}/\text{m}^2)$	0.1
$J \cdot \text{m}$	1.26
$kx/(\text{N} \cdot \text{m})$	77 600
$ky/(\text{N} \cdot \text{m})$	30 000
$fx/[(\text{N} \cdot \text{s})/\text{m}]$	1 000
$fy/[(\text{N} \cdot \text{s})/\text{m}]$	1 000

由系统同步能力指数可知,对其产生影响的参数分别为 $r_m, r_\psi, r_\varphi, \eta, \mu_x, \mu_y, \mu_\psi, \mu_\varphi$, 鉴于此处的研究重点不在近共振,所以在振动系统运动时,只有 r_m, r_ψ, η 。

η 是无量纲比例系数,其取值大于 0 小于等于 1。故可通过改变 η 大小的方式研究参数变化的影响。

η 对相位角的影响如图 3 所示。

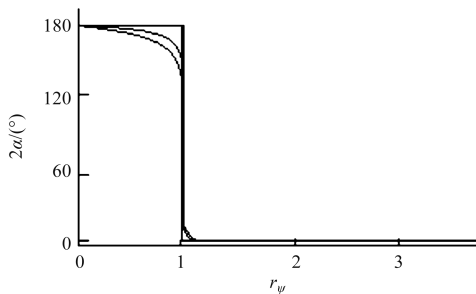


图 3 η 对相位角的影响

图 3 中,3 条曲线自上而下分别表示 $\eta = 1, \eta = 0.6, \eta = 0.2$ 时,无量纲参数 r_ψ 与相位角 2α 的关系。

可以看出,当 $\eta = 1$ 时, r_ψ 在 0 到 1 之间对应的相位保持为 180° , 当 r_ψ 超过 1 则相对相位变为 0° ; 同时,随着 η 减小,相位在 r_ψ 等于 1 附近趋近 0° 或 180° 越来越慢。

由此可以说明,质径 r_ψ 越趋近 1, 系统参数越对称,则相位差越稳定,系统振动情况越理想。

η 对力矩的影响如图 4 所示。

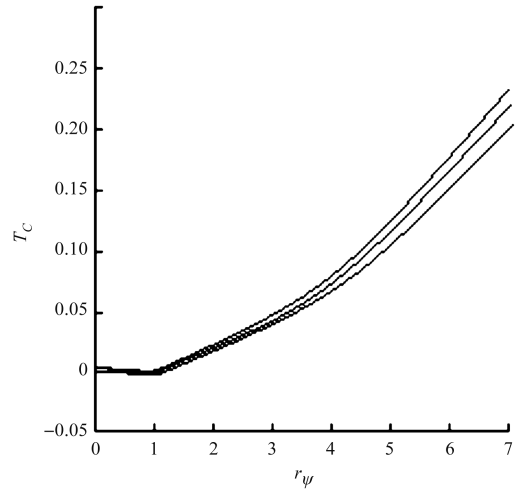


图 4 力矩影响

图 4 中,3 条曲线自上而下分别表示 $\eta = 1, \eta = 0.6, \eta = 0.2$ 时,无量纲参数 r_ψ 与同步力矩 T_c 的关系,同步力矩是多个参量耦合的复合函数。

由此可以看出,3 条曲线在 r_ψ 取 1 时均存在零点,随后,当 r_ψ 大于 1,也就是相位趋于 0° 时,同步力矩随之增大,而同步力矩越大系统越容易达到同步状态。

由式(37)可看出:系统同步能力系数 D 与 r_m 并无比例关系,即 r_m 的大小变化并不对系统同步能力系数 D 产生影响;

同时,由式(37)和图(3,4)可以看出:只要使系统参数尽量对称,使 r_ψ 尽可能趋近于 1, 系统具有可靠的同步性。

由于远端共振时,同步稳定性参数的变化率随 r_ψ 增加而单调减小,而当 r_ψ 取值约为 4.6 时,有一个零点,故要使系统具有稳定性,需使 r_ψ 的值大于 0 小于 4.6。

5.2 三相异步电机数学模型

三相异步电机是一种将电能转化为机械能的电力拖动装置,其具有很多优点,如结构简单、生产成本低、稳定性好等,因此在实际生产中得到了大范围应用。对于速度调节精度要求较高、制动频繁、多单元同步协调运转的振动机械,采用三相异步电机驱动具有一定的合理性。

由于笔者主要研究振动系统稳定时的同步情况，故将电机的电枢电阻设置为常值函数。

电机机械特性方程如下：

$$T_e = T_L + \frac{J d\omega}{n_p dt} \quad (41)$$

式中： T_e —电机电磁转矩； T_L —电机负载转矩； J —电枢转动惯量； n_p —极对数。

电磁转矩与电枢电流有如下关系：

$$T_e = K_T i_{qs} \quad (42)$$

式中： $K_T = (3/2) n_p (L_m/L_r) \varphi_{dr}$ ； L_m —一定子与转子互感系数， H ； L_r —一定子与转子自感系数， H ； φ_{dr} —转子磁链， Wb ； i_{qs} —定子电流， A 。

为简化分析，笔者采用各项参数均一致的 2 个三相异步电机（电机负载由外部机电耦合模型传入）；采用 Simulink 建立三相异步感应电机的仿真模型，如图 5 所示。

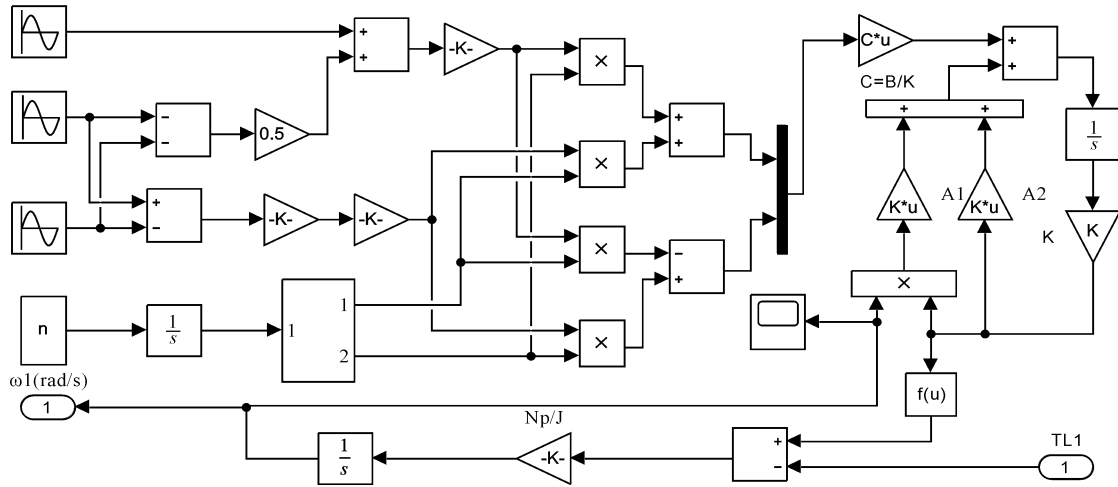


图 5 三相异步电机模型

5.3 双机驱动振动系统仿真

为了验证该系统控制同步设计的合理性，笔者利

用 Simulink 搭建电机-振动系统仿真模型，如图 6 所示。

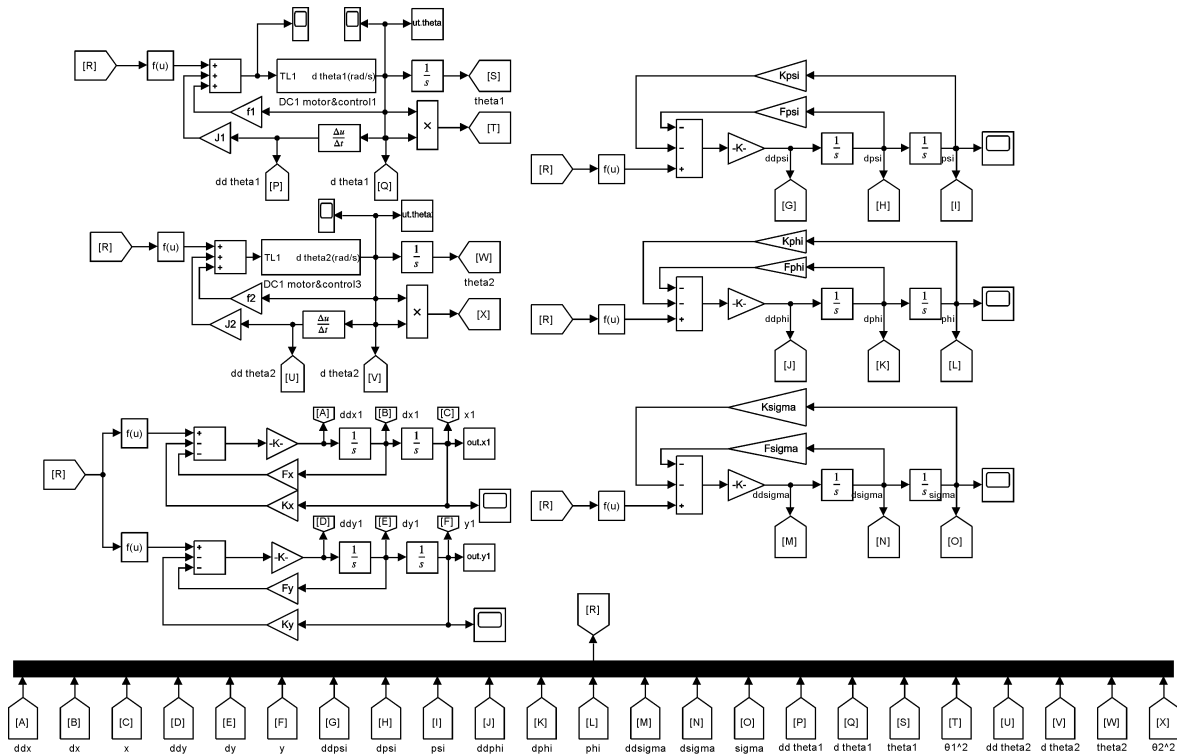


图 6 系统仿真模型

笔者采用龙格-库塔算法和变步长控制策略，代入表 1 系统参数进行仿真分析。

理想工况下，双机驱动振动系统结构完全对称，系统运行过程中不受外界干扰，两电机同时启动且运行

中无断电现象发生。

其自同步仿真结果如图7所示。

由图7(a,b)可知:在经历一段振荡波动后,两电机转速均维持在19.6 rad/s左右。由于电机与偏心转子总在一个旋转周期内往复运动,引起机体质量分布

也在一个周期内往复波动,因此,电机的角速度总是维持在一个定值附近呈现有规律的周期波动。

由于两电机反向回转,相对相位始终在 0° 至 180° 间变化,故笔者将其中一个电机相位取绝对值,看作同向回转再进行计算和研究。

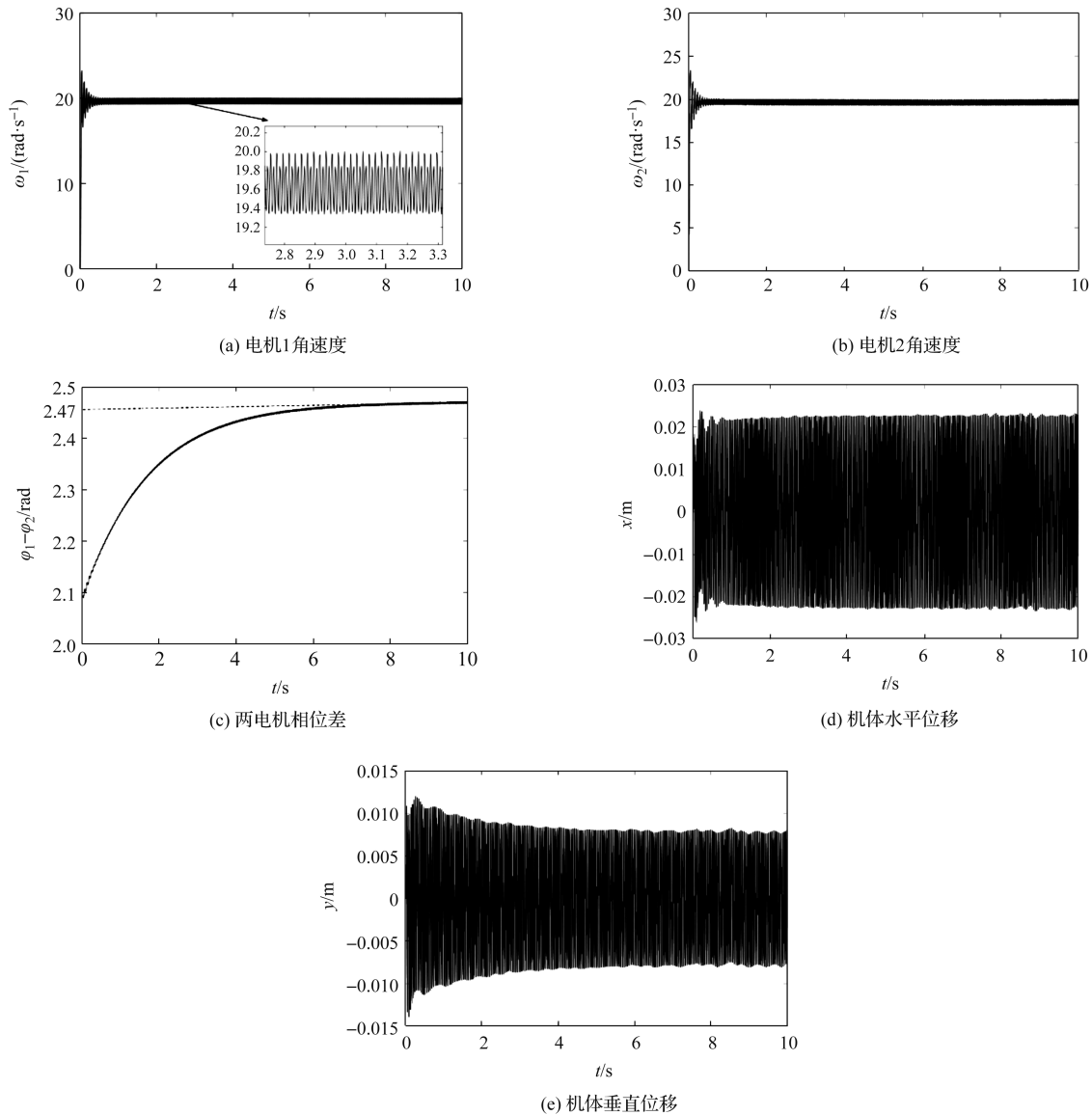


图7 理想工况下的自同步仿真图

由图7(c)可以看到:两电机相位的绝对值初始偏差为2.1 rad,在经过8 s左右调整后,最终稳定在2.47 rad附近。由前面计算分析可知,此时双机驱动振动系统并不是维持在零相位差的理想同步状态;但是两电机相位差稳定,也可看作为一种具有固定相位差值的同步状态。

图7(d,e)为机体 x 、 y 方向的运动情况。由此可知:二者与电机角速度变化情况类似,均在某一定值附近做有规律的周期波动。

为研究其自同步特性,另一组实验仿真在系统开

始工作后,且两电机达到同步状态时,笔者切断其中一个电机的电源,随后再接通,观察此时系统中两电机的同步传动情况。

振动同步传动工况仿真结果图如图8所示。

由图8(a)可知:当电机2失去动力后,电机1的角速度仍然维持在20 rad/s左右,几乎无变动;

由图8(b)可知:当电机2失去动力后,电机2的角速度出现明显的波动,但经过25 s的调整时间后,角速度仍然维持在20 rad/s左右,但是波动范围明显变小;

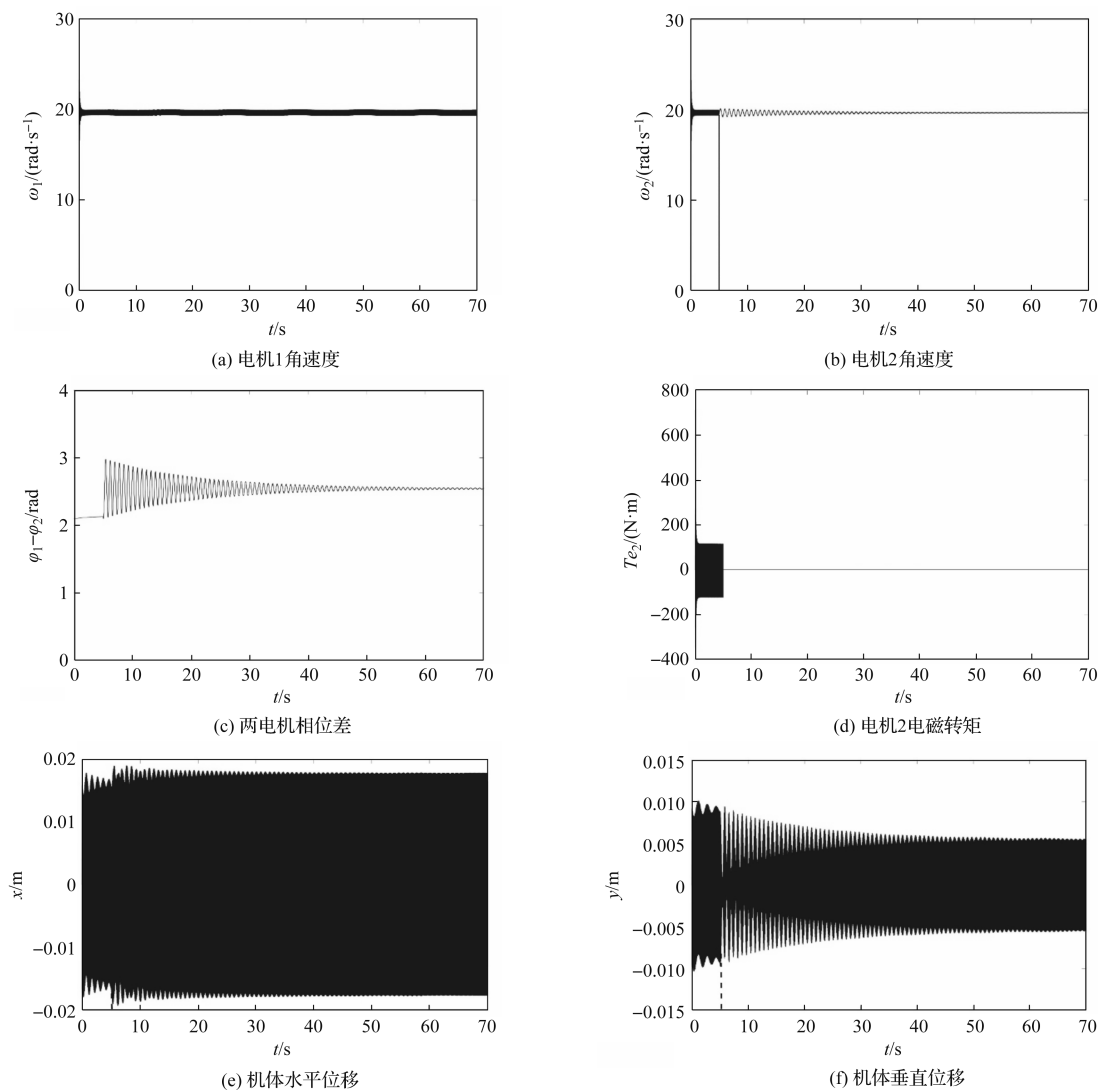


图 8 振动同步传动工况仿真结果图

图 8(c) 可知: 两电机相位差在电机 2 失去动力后开始剧烈波动, 但最终仍然实现稳定状态, 其稳态值由最初 2.1 rad 上升至 2.6 rad 左右;

由图 8(d) 电机 2 电磁转矩变化情况可见: 电磁转矩对角速度波动影响范围较大, 当电磁转矩突变为 0 后, 电机 2 角速度波动反而较小;

图 8(e, f) 显示了机体 x 、 y 方向的运动受到电机 2 失去动力的影响情况。由此可知: 当电机 2 在 5 s 失去动力后, 各方向位移均受到一定程度的影响; 特别是机体 y 方向变化最为剧烈, 从 $-0.01 \text{ m} \sim 0.01 \text{ m}$ 的正弦曲线波动逐渐缩减为 $-0.005 \text{ m} \sim 0.005 \text{ m}$ 的波动。

6 结束语

在双电机空间振动同步模型的基础上, 笔者使转子反向回转, 对其进行了受力分析, 利用 Lagrange 方程、Hamilton 原理分析了振动系统的稳态方程, 借助 MATLAB 和 Simulink 等软件, 对系统进行了仿真实验,

以验证其正确性及可行性。

研究取得以下成果:

1) 建立了双电机同轴线排布, 且转子反向回转的振动系统模型, 并推导出了该系统实现同步性和稳定性的判据;

2) 仿真实验结果验证了理论的正确性及可行性: 两偏心转子可以保持 2 rads 的相对相位差同步运动; 系统断电重连后电机仍可以在 25 s 内再次达到同步稳定, 且运动轨迹只发生 0.04 m 的改变;

3) 该研究填补了两电机同轴线空间排布, 同时转子反向旋转的理论空缺。两转子反向回转的运动更符合设计生产中复杂多变的工况, 为未来的相关研究提供了理论依据。

在未来的研究计划中, 为了进一步拓展该模型的实际应用领域, 笔者将继续针对空间振动同步理论模型进行扩展: 1) 从双机自同步向多机自同步进行推广; 2) 从矩形排布方式向圆周等特殊排布方式推广;

3)在自同步模型中加入控制同步或智能控制理论。

参考文献 (References):

- [1] BLEKHMANN II. Self-synchronization of vibrators for some vibration machines[J]. *Inzhenerny Sbornik*, 1953, 16: 49-72 (in Russian).
- [2] BLEKHMANN II. On self-synchronization and controlled synchronization[J]. *Systems & Control Letters*, 1997, 31(5): 299-305.
- [3] BLEKHMANN II. Self-synchronization and controlled synchronization; general definition and example design[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2002, 58(4-6): 367-384.
- [4] 闻邦椿,刘凤翹. 振动机械的理论及应用[M]. 北京:机械工业出版社,1982.
- [5] 闻邦椿. 机械系统的振动同步与控制同步[M]. 北京:科学出版社,2003.
- [6] ZHAO Chun-yu, ZHU Hong-tao, BAI Tian-yang, et al. Synchronization of two non-identical coupled exciters in a non-resonant vibrating system of linear motion. part I: theoretical analysis[J]. *Shock & Vibration*, 2009, 16(5): 505-515.
- [7] ZHAO Chun-yu, ZHAO Qing-hua, ZHANG Yi-min, et al. Synchronization of two non-identical coupled exciters in a non-resonant vibrating system of plane motion[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2011, 25(1): 49-60.
- [8] ZHANG Xue-liang, LI Zhen-min, LI Ming, et al. Stability and Sommerfeld effect of a vibrating system with two vibrators driven separately by induction motors[J]. *IEEE / ASME. Transactions on Mechatronics*, 2021, 26(2): 807-817.
- [9] ZHANG Xue-liang, GU Da-wei, YUE Hong-liang, et al. Synchronization and stability of a far-resonant vibrating system with three rollers driven by two vibrators[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 91(3): 261-279.
- [10] HOU Yong-jun, PAN Fang. Synchronization and stability of two unbalanced rotors with fast antirotation considering energy balance [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015(14): 694145.
- [11] ZOU Min, FANG Pan, PENG Huan, et al. Study on synchronization characteristics for self-synchronous vibration system with dual-frequency and dual-motor excitation[J]. *Journal of Mechanical Science & Technology*, 2019, 33(3): 1065-1078.
- [12] FANG Pan, HOU Yong-jun, DU Ming-jun. Synchronization characteristics of a rotor-pendula system in multiple coupling resonant systems [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C. Journal of mechanical engineering science*, 2018, 232(10): 1802-1822.
- [13] ZHAO Chun-yu, ZHU Hong-tao, ZHANG Yi-ming, et al. Synchronization of two coupled exciters in a vibrating system of spatial motion [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2010, 26(3): 157-173.
- [14] MIKLOS A, SZABO Z. Simulation and experimental validation of the dynamical model of a dual-rotor vibrotactor [J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2015, 334(1): 98-107.
- [15] 陈晓哲,闻邦椿,李凌轩. 空间单质体双机同轴线振动系统的自同步特性[J]. 振动工程学报, 2017, 30(5): 747-754.
- [16] 陈晓哲,窦景欣,孔祥希,等. 两激振器同一旋转轴线振动系统的自同步理论[J]. 振动与冲击, 2017, 36(14): 19-25, 44.
- [17] 方 潘,石双全,陆小刚,等. 空间三机振动系统振动同步机理研究[J]. 中国电机工程学报, 2022, 42(13): 4963-4974.
- [18] 樊显涛,唐博文,谭 蔚. 并排塔器流致振动特性及预测模型研究[J]. 压力容器, 2022, 39(2): 1-10.

[编辑:司红岩]

本文引用格式:

安兆喆,张楠. 空间双激振器同轴反向回转振动系统自同步特性研究[J]. 机电工程, 2023, 40(4): 552-561.

AN Zhao-zhe, ZHANG Nan. Self-synchronization of coaxial and reverse rotating vibration system with two motors[J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2023, 40(4): 552-561.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>