

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2022.10.014

基于自然正交补的冗余驱动并联机构动力学建模^{*}

王耀军^{1,2}, 张海峰²

(1. 浙江机电职业技术学院 自动化学院, 浙江 杭州 310053;

2. 浙江理工大学 机械与自动控制学院, 浙江 杭州 310018)

摘要:为了解决并联机构引入冗余驱动造成驱动力求解不唯一,可能引起内力对抗的问题,对冗余驱动并联机构的动力学建模和驱动力优化进行了研究。首先,以 3RRR 冗余驱动并联机构为例,基于闭环矢量法确定了机构的位移、速度关系;然后,为克服牛顿-欧拉法方程多、计算量大,以及欧拉-拉格朗日法计算量大、实时性差的问题,基于螺旋理论,提出了应用自然正交补方法建立机构的动力学模型,推导了机构的逆动力学方程;最后,采用无穷大范数法,以最小化最大驱动力为目标优化驱动力,并通过圆轨迹跟踪对其进行了仿真。研究结果表明:应用自然正交补方法建立冗余驱动并联机构的模型,采用最小化最大驱动力优化,将最大驱动器功率由 1.5 Nm 降低到 1.2 Nm,驱动器功率降低了 20%;该方法具有形式简洁、系统高效、中间变量少的优点,对冗余驱动机构的建模和后续控制律开发具有较大的参考价值。

关键词:机构学理论;机构动力学方程;冗余驱动;自然正交补方法;驱动力优化

中图分类号:TH112

文献标识码:A

文章编号:1001-4551(2022)10-1440-08

Dynamics modeling of redundantly-actuated parallel robot based on natural orthogonal complement

WANG Yao-jun^{1,2}, ZHANG Hai-feng²

(1. School of Automation, Zhejiang Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Hangzhou 310053, China;

2. Faculty of Mechanical Engineering and Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In order to solve the problem of non-unique solutions of actuating forces (or torques) and potentially antagonistic internal forces, the dynamic modeling and ensuing internal forces distribution and optimization of redundantly-actuated parallel mechanisms were studied. Firstly, taking the 3RRR redundantly-actuated parallel robot as an example, the solution of displacement and velocity of the mechanism was determined based on the closed-loop vector method. Secondly, by resorting to the screw theory, a dynamic modeling approach was first proposed by means of the natural orthogonal complement, and then applied to obtain the inverse-dynamics equations of the 3RRR mechanism, that overcomes the shortcomings of both the Newton-Euler and the Euler-Lagrange methods. Finally, the driving forces (or torques) were optimized by infinity-norm solution that minimizes the maximum-driving-torque, with simulation study of a circle trajectory tracking included as a verification. The research results show that, by applying the natural orthogonal complement and the minimization of the maximum-driving-torque, the proposed method decreases the power requirement of the redundant drivers from 1.5 Nm to 1.2 Nm, a significant reduction by 20%; it has the advantages of both simple and efficient derivation, with few intermediate variables, and has great application and reference value for modeling of redundantly-actuated mechanical systems and subsequent control law design.

Key words: mechanism theory; dynamic equation of mechanism; redundant drive; natural orthogonal complement method; driving-force optimization

收稿日期:2022-04-25

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51935010,52005448);浙江省自然科学基金资助项目(LQ19E050015)

作者简介:王耀军(1977-),男,浙江宁波人,博士,副教授,主要从事并联机器人建模与控制方面的研究。E-mail:yaojunw@vip.163.com

0 引言

在多体系统的动力学建模中,需要一种合适的方法来求解系统的运动方程解,这是设计和控制机械系统的关键环节之一^[1,2]。

机构的动力学模型建立起各关节驱动力(矩)与各关节速度、加速度的相互关系,是机构的设计、控制、仿真等算法设计的基础。其中,正动力学模型解决机构受力后的运动轨迹问题,而逆动力学模型是在给定轨迹下求解驱动力(矩)。

有学者采用经典动力学建模方法对此进行研究。比如,田波等人^[3]基于运动和力关系分析用牛顿-欧拉法(Newton-Euler, NE)建立了机械臂动力学模型,考虑了机构各刚体的相互作用力,全面揭示了系统刚体的动力学特性;但该方法方程众多、计算量大。KHALIL W等人^[4]基于系统能量平衡分析用欧拉-拉格朗日法(Euler-Lagrange, EL),建立了并联机构动力学模型,采用 EL 法虽简化了系统方程;但该方法存在计算量较大和实时性问题^[5]。

另外,还有如倪仕全等人^[6]基于虚功原理、CHENG Hui 等人^[7]应用了 d'Alembert 原理、MILLER K^[8]采用了 Hamilton 原理和 KANE TR 等人^[9]提出的凯恩方程法;以及其他一些方法,如李群理论^[10]、虚拟弹簧法^[11]、螺旋理论^[12]、递归矩阵法^[13]和广义动量法^[14]等。

在研究冗余驱动并联机构时,驱动冗余给建模带来了新的挑战^[15],导致驱动力求解不唯一,可能产生对抗内力。因此,机构具有对驱动力进行分配和优化的内在要求^[16]。

很多学者基于传统方法,研究了机构的动力学建模,但存在模型变量多、方程数量大和计算效率问题。为此,ANGELES J^[17]提出了,根据螺旋理论,系统约束螺旋可采用与系统各连杆运动螺旋成线性关系的约束矩阵的正交补来消除(该约束的消除方法基于运动与约束的自然对应关系,故称自然正交补),该方法具有系统高效的优点。但 ANGELES J 未讨论自然正交补在冗余驱动系统中的应用。

为了满足并联机构的应用和发展需求,需要一种形式简洁、计算高效的适用于冗余驱动机构的动力学建模方法。

笔者以冗余驱动 3RRR 平面机构^[18]为研究对象,基于闭环矢量法推导机构的位移、速度关系,再基于螺旋理论,应用自然正交补方法,建立机构的逆动力学方程;以最小化最大驱动力为目标,采用无穷大范数法求

解驱动力静不定问题,并通过圆轨迹跟踪进行仿真,研究冗余驱动机构的动力学特性。

1 机构运动学模型

1.1 机构描述

3RRR 冗余驱动并联机器人如图 1 所示。

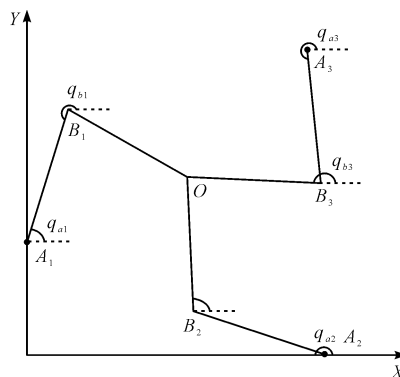


图 1 3RRR 机构

由图 1 可知:该机构由 1 个基础平台(base platform, BP)、3 个相同的 RR 分支(各分支由对应的第 1 个 R 关节驱动)、及 1 个动平台(mobile platform, MP)组成。第 i 个分支,当 $i=1,2,3$ 时,是 $A_i B_i O$ 。3 个驱动关节位于点 A_i , 3 个被动关节位于点 B_i , 机构的末端执行器汇聚到 O 点,即机构的动平台。

笔者建立参考坐标系 XY , 其中 A_1, A_2 点分别在 X 轴和 Y 轴上。设 6 根杆子的长都为 l , 将编号 1—6 分别指定连杆 $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, B_1 O, B_2 O, B_3 O$ 。

机器人各参数值如表 1 所示。

表 1 3RRR 机器人参数表

描述	质量 /kg	长度 /m	质心到关节 的距离/m	惯性矩 /($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
$A_1 B_1$	1.252 5	0.244 0	0.115 6	0.012 4
$A_2 B_2$	1.366 3	0.244 0	0.065 7	0.012 2
$A_3 B_3$	1.366 3	0.244 0	0.065 7	0.012 2
$B_1 O$	1.077 1	0.244 0	0.162 1	0.009 8
$B_2 O$	0.413 2	0.244 0	0.109 6	0.003 6
$B_3 O$	0.413 2	0.244 0	0.109 6	0.003 6

由表 1 可知:该机构三支链均布;动平台可在 X 和 Y 组成的平面内移动,该机构具有 XY 平面内的两个移动自由度。

1.2 机构位移求解

已知组成机构的六杆长度皆为 l , A_i 和 B_i 的各点坐标分别为: $\mathbf{x}_{Ai} = [x_{Ai}, y_{Ai}]^T$ 和 $\mathbf{x}_{Bi} = [x_{Bi}, y_{Bi}]^T$ 。动平台 O 点坐标为 $\mathbf{x} = [x, y]^T$ 。当 $i=1,2,3$, 主动关节角度 q_{ai} 和被动关节角度 q_{bi} 可经计算得到。

杆长为:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{Bi}\| = l, \|\mathbf{x}_{Ai} - \mathbf{x}_{Bi}\| = l \quad (1)$$

且:

$$\mathbf{x}_{Bi} = [x_{Ai} + l \cos q_{ai}, y_{Ai} + l \sin q_{ai}]^T \quad (2)$$

由式(1,2)可求运动学正解:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & [\|\mathbf{x}_{B1}\|^2(y_{B2} - y_{B3}) + \|\mathbf{x}_{B2}\|^2(y_{B3} - y_{B1}) + \|\mathbf{x}_{B3}\|^2(y_{B1} - y_{B2})] / 2 [x_{B1}(y_{B2} - y_{B3}) + x_{B2}(y_{B3} - y_{B1}) + \\ & x_{B3}(y_{B1} - y_{B2})] \\ y = & [\|\mathbf{x}_{B1}\|^2(x_{B3} - x_{B2}) + \|\mathbf{x}_{B2}\|^2(x_{B1} - x_{B3}) + \|\mathbf{x}_{B3}\|^2(x_{B2} - x_{B1})] / 2 [x_{B1}(y_{B2} - y_{B3}) + x_{B2}(y_{B3} - y_{B1}) + \\ & x_{B3}(y_{B1} - y_{B2})] \end{aligned} \quad (3)$$

任一分支组成的三角形 $A_i B_i O$ 内,根据内角的余弦定理,可知:

$$\begin{aligned} \|B_i O\|^2 = & \|A_i B_i\|^2 + \|A_i O\|^2 - \\ & 2 \|A_i B_i\| \|A_i O\| \cos(q_{ai} - \psi_i) \end{aligned} \quad (4)$$

其中:

$$\psi_i = \text{atan2}(y - y_{Ai}, x - x_{Ai}) \quad (5)$$

再令:

$$d_i = \sqrt{(x - x_{Ai})^2 + (y - y_{Ai})^2} \quad (6)$$

最后得到机构的逆运动学关系:

$$q_{ai} = \arccos \frac{d_i}{2l} + \psi_i \quad (7)$$

进一步可知被动关节的角度:

$$q_{bi} = \text{atan2}(y - y_{Bi}, x - x_{Bi}) \quad (8)$$

再令 $|A_i A_j| = a$, 由式(1)可知:

$$b_{1i} \sin q_{ai} + b_{2i} \cos q_{ai} + b_{3i} = 0 \quad (9)$$

式(9)中间变量定义如下:

$$\begin{cases} b_{11} = -2l \left(y + \frac{\sqrt{3}}{6} a \right) \\ b_{21} = -2l \left(x + \frac{a}{2} \right) \\ b_{31} = \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{6} a \right)^2 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} b_{12} = -2l \left(y + \frac{\sqrt{3}}{6} a \right) \\ b_{22} = -2l \left(x - \frac{a}{2} \right) \\ b_{32} = \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{6} a \right)^2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} b_{13} = -2l \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} a \right) \\ b_{23} = -2xl \\ b_{33} = x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} a \right)^2 \end{cases} \quad (12)$$

由式(10~12)可推导运动学逆解的另一种表达式:

$$q_{ai} = 2 \arctan \frac{-b_{1i} \pm \sqrt{b_{1i}^2 + b_{2i}^2 - b_{3i}^2}}{b_{3i} - b_{2i}} \quad (13)$$

1.3 机构速度求解

将式(13)求导得到:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{qa}^{-1} \mathbf{K}_x \quad (14)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{qa} &= \text{diag}[J_{q11}, J_{q22}, J_{q33}] \\ \mathbf{K}_x &= \begin{bmatrix} K_{x11} & K_{x12} \\ K_{x21} & K_{x22} \\ K_{x31} & K_{x32} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

式中: $\mathbf{J}$ —系统雅可比矩阵; $J_{q11}, J_{q22}, J_{q33}$ —正雅可比矩阵各对角元素; $K_{x11}, K_{x12}, K_{x21}, K_{x22}, K_{x31}, K_{x32}$ —逆雅可比矩阵各元素。

进一步求解得:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{qa} &= \text{diag}[l \sin(q_{b1} - q_{a1}), l \sin(q_{b2} - q_{a2}), l \sin(q_{b3} - q_{a3})] \\ \mathbf{K}_x &= \begin{bmatrix} \cos q_{b1} & \sin q_{b1} \\ \cos q_{b2} & \sin q_{b2} \\ \cos q_{b3} & \sin q_{b3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

当机构不处于奇异状态,则系统的雅可比矩阵可表示为:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{qa}^{-1} \mathbf{K}_x \quad (17)$$

该例中各参数取值如下:

A_i 点坐标分别为 $A_1(0, 0.25)$ 、 $A_2(0.433, 0)$ 、 $A_3(0.433, 0.5)$, 所有连杆长度 $l = 0.244 \text{ m}$ 。任两个 A_i 点距离 $a = 0.5 \text{ m}$ 。

2 机构动力学模型

2.1 刚体自然正交补建模

针对该 3RRR 机构,首先,笔者采用牛顿-欧拉方程来构造不含约束的耦合方程。机构由 6 个刚体组成。有 3 个冗余驱动的连杆,冗余度 (degree-of-redundancy, DOR) 为 1。

定义刚体 i 的六维运动螺旋 $\mathbf{t}_i$ 和作用在该刚体上的六维力螺旋 $\mathbf{w}_i$ 如下:

$$\mathbf{t}_i \equiv [\boldsymbol{\omega}_i^T \quad \dot{\mathbf{c}}_i^T]^T \text{ 和 } \mathbf{w}_i \equiv [\mathbf{n}_i^T \quad \mathbf{f}_i^T]^T \quad (18)$$

式中: $\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\mathbf{c}}_i$ —刚体的角速度和刚体质心的线速度; $\mathbf{n}_i, \mathbf{f}_i$ —施加于刚体质心的力矩和力。

接着,笔者将作用于刚体 i 的力螺旋分解成两部分:

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i^E + \mathbf{w}_i^C \quad (19)$$

式中: $\mathbf{w}_i^E$ —做功的广义外部力螺旋; $\mathbf{w}_i^C$ —不做功的广

义约束力螺旋。

引入对子(dyad)概念,用一个 6×6 阵列来表示一个刚体的惯性特征,即质量和惯性矩,在式(20)中用 M_i 来表示。

刚体 i 的 6×6 角速度对子 W_i 和惯性对子 M_i 定义为:

$$W_i = \begin{bmatrix} \Omega_i & O \\ O & O \end{bmatrix} \text{ 和 } M_i = \begin{bmatrix} I_{Ci} & O \\ O & m_i \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中: Ω_i —向量 ω_i 的 3×3 叉乘矩阵(cross product matrix, CPM)。

任何一个向量 $v \in \mathbb{R}^3$ 的叉乘矩阵 $V \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 定义为: $V = (\partial v \times x / \partial x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$ 。 $O, \mathbf{1}$ — 3×3 零矩阵和单位矩阵; I_{Ci} — 3×3 作用在刚体 i 的质心的惯性张量; m_i —刚体的质量。

给出刚体 i 的牛顿-欧拉方程为:

$$\begin{aligned} I_{Ci} \dot{\omega}_i + \omega_i \times I_{Ci} \omega_i &= n_i \\ m_i \ddot{c}_i &= f_i \end{aligned} \quad (21)$$

上述方程可表示为一种更加紧凑的形式^[17]:

$$M_i \dot{t}_i = -\dot{M}_i t_i + w_i^E + w_i^C \quad (22)$$

即:

$$M_i \dot{t}_i = -W_i M_i t_i + w_i^E + w_i^C \quad (23)$$

令 $x = [x_1, x_2]^T$ 表示系统的广义坐标,它的时间变化量 $\dot{x} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2]^T$ 表示为同一个系统的广义速度。可知第 i 个刚体的运动螺旋为:

$$t_i = T_i \dot{x} \quad (24)$$

式中: T_i —刚体 i 的 6×2 运动映射矩阵。

它将系统的广义坐标 $\dot{x}$ 映射到刚体 i 的运动螺旋。需要指出,在可行的系统运动状态 t_i 下,约束螺旋 w_i^C 并不做功:

$$t_i^T w_i^C = 0 \quad (25)$$

将式(24)代入式(25),可得

$$\dot{x}^T T_i^T w_i^C = 0 \quad (26)$$

式(26)在任何广义速度 $\dot{x}$ 取值下都必须满足成立条件,因此 $T_i^T w_i^C$ 等于零。进一步在式两边都乘以 T_i^T ,得到:

$$T_i^T M_i \dot{t}_i = -T_i^T W_i M_i t_i + T_i^T w_i^E \quad (27)$$

外部力螺旋 w_i^E 来自于所有环境施加于该刚体的力和力矩:

$$w_i^E = w_i^A + w_i^G + w_i^D \quad (28)$$

式中: w_i^A —驱动力螺旋; w_i^G —重力螺旋; w_i^D —耗散力螺旋。

式(24)两边同时对时间求导:

$$\dot{t}_i = T_i \ddot{x} + \dot{T}_i \dot{x} \quad (29)$$

最后,将式(28,29)代入式(27)得到:

$$I_i \ddot{x} + C_i \dot{x} = T_i^T w_i^A + T_i^T w_i^G + T_i^T w_i^D \quad (30)$$

式中: I_i —刚体 i 的 6×6 惯性对子; C_i —同一个刚体的 6×6 科氏力和离心力对子。

即:

$$I_i = T_i^T M_i T_i, C_i = T_i^T (M_i \dot{T}_i + W_i M_i T_i) \quad (31)$$

2.2 系统自然正交补建模

接下来,笔者推导系统不含约束力螺旋的数学模型。通过系统运动螺旋和系统约束力螺旋的对应作用关系来消除约束力螺旋。其关系将在下文进一步定义。

与单个刚体相对应,和系统有关的全局变量如下:

$$\begin{aligned} t &= \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}, w^C = \begin{bmatrix} w_1^C \\ \vdots \\ w_n^C \end{bmatrix} \\ w^A &= \begin{bmatrix} w_1^A \\ \vdots \\ w_n^A \end{bmatrix}, w^G = \begin{bmatrix} w_1^G \\ \vdots \\ w_n^G \end{bmatrix}, w^D = \begin{bmatrix} w_1^D \\ \vdots \\ w_n^D \end{bmatrix} \\ M &= \text{diag}(M_1, \dots, M_n) \\ W &= \text{diag}(W_1, \dots, W_n) \end{aligned} \quad (32)$$

式中: t —系统运动螺旋; w^C —系统约束力螺旋; w^A —系统驱动力螺旋; w^G —系统重力螺旋; w^D —系统耗散力螺旋; M — 36×36 块对角矩阵表示的系统质量; W — 36×36 块对角矩阵表示的系统角速度; T — 36×2 系统运动映射矩阵。

未约束的系统动力学方程为:

$$M \dot{t} = -W M t + w^A + w^G + w^D + w^C \quad (33)$$

显而易见,系统的运动约束关系可以通过一个六维系统运动螺旋 t 的线性齐次方程来表示:

$$K t = 0 \quad (34)$$

式中: K — 36×36 矩阵,其秩为34。

可得系统运动螺旋为:

$$t = T \dot{x} \quad (35)$$

将式(35)代入式(34),得到:

$$K T = O \quad (36)$$

式中: O — 36×2 零矩阵。

称 K 为矩阵 T 的自然正交补矩阵。

此外,式(35)两边同时对时间求导,可得到系统运动螺旋 t 随时间的变化率:

$$\dot{t} = T \ddot{x} + \dot{T} \dot{x} \quad (37)$$

接着,将式(37)代入式(33),随后在新式两边同时前乘 T^T 。

考虑到:

$$T^T w^C = \sum_{i=1}^n T_i^T w_i^C = 0 \quad (38)$$

系统的牛顿-欧拉方程在广义坐标上表示,而前面的式(27)表示为笛卡尔变量,因此,系统各刚体的运动螺旋和力螺旋表示为:

$$\ddot{\mathbf{I}}\mathbf{x} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^T \mathbf{w}^A + \mathbf{T}^T \mathbf{w}^G + \mathbf{T}^T \mathbf{w}^D \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &\equiv \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{T}_i \\ \mathbf{C} &\equiv \mathbf{T}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{W} \mathbf{M} \mathbf{T}) \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i^T (\mathbf{M}_i \dot{\mathbf{T}}_i + \mathbf{W}_i \mathbf{M}_i \mathbf{T}_i) \end{aligned} \quad (40)$$

可知:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &\equiv \mathbf{T}^T \mathbf{w}^A \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i^T \mathbf{w}_i^A \\ \boldsymbol{\gamma} &\equiv \mathbf{T}^T \mathbf{w}^G \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i^T \mathbf{w}_i^G \\ \boldsymbol{\delta} &\equiv \mathbf{T}^T \mathbf{w}^D \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i^T \mathbf{w}_i^D \end{aligned} \quad (41)$$

式中: $\boldsymbol{\tau}$ —系统的二维广义驱动力; $\boldsymbol{\gamma}$ —二维广义重力; $\boldsymbol{\delta}$ —二维广义耗散力。

从而得到所求的系统数学模型为:

$$\boldsymbol{\tau} = \ddot{\mathbf{I}}\mathbf{x} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\delta} \quad (42)$$

考虑到角速度对子 $\mathbf{W}_i$ 是斜对称的,而惯性对子 $\mathbf{M}_i$ 和 $\mathbf{I}$ 则是对称矩阵^[19]。可知 $\mathbf{I}$ 是对称和正定的, $\dot{\mathbf{I}} - 2\mathbf{C}$ 是斜对称的。

该结论说明,用于串联机器人的控制律和方法同样可用于控制并联机构^[20]。但机械系统难免存在磨损及尺寸偏差^[21],冗余驱动可能产生非常大的内力^[22],必须在控制律设计时充分考虑。

笔者提出的自然正交补建模步骤如图 2 所示。

2.3 机器人连杆的运动螺旋系

两个通过转动副或移动副连接的连杆其相对位姿可分别用运动螺旋 $\mathbf{t}_r$ 和 $\mathbf{t}_p$ 来表示,即

$$\mathbf{t}_r = \dot{\theta} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{s} \end{bmatrix}, \mathbf{t}_p = \dot{b} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

式中: $\mathbf{t}_r$ —转动副运动螺旋; $\mathbf{e}_1$ —转动副旋转轴; θ —旋转角度; $\mathbf{s}$ —从旋转轴上某点 O 指向连杆 2 的质心的向量; $\mathbf{t}_p$ —移动副运动螺旋; b —移动副移动距离; $\mathbf{e}_2$ —移动方向的单位向量。

运动螺旋的前 3 个元素表示刚体的角速度,已知机构旋转矩阵 $\mathbf{Q}$ 可得到刚体的角速度矩阵:

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix} \quad (44)$$

式中: ω_{ij} —角速度矩阵各元素。

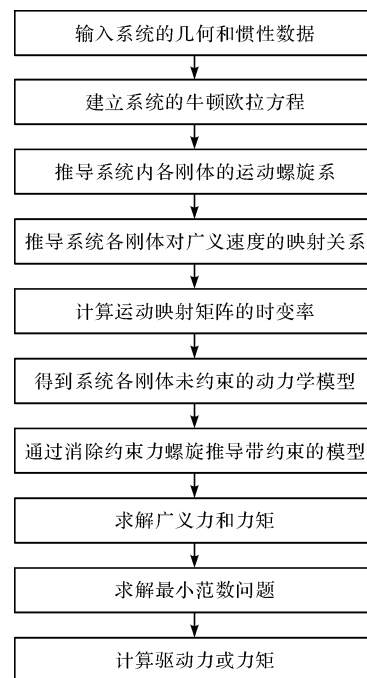


图 2 自然正交补建模步骤

运动螺旋的后 3 个元素表示刚体质心的速度,直接利用式(43)计算给出。因此,由 j 个连杆串联而成的构件,其末端连杆的运动螺旋 $\mathbf{t}$ 可以通过每一对相连连杆之间的相对运动螺旋的组合来表示:

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^j \mathbf{t}_{i,i-1} \quad (45)$$

式中: $\mathbf{t}_{i,i-1}$ —连杆 i 相对于其上一级连杆 $i-1$ 的相对运动。

该 3RRR 平面冗余驱动并联机器人由 3 个相同尺寸的分支链组成,每个分支是一个平面二自由度串联机构。所以,3 个分支运动链组成的并联机构,其运动可表示为各分支链允许的运动集,即在闭链约束条件下允许的动平台运动。

由式(43,45)可求得系统各杆件的运动螺旋。

令各杆件质心离转动关节的距离为 l_{ci} ,相邻杆件 $A_i B_i$ 和 $B_i O$ 的夹角为 $q_{\delta i}$,该夹角的关系为:

$$q_{\delta i} = q_{bi} - q_{ai} \quad (46)$$

最后得到系统各杆件的运动螺旋:

$$\mathbf{t}_1 = [0, 0, \dot{q}_{a1}, -l_{c1} \sin q_{a1} \dot{q}_{a1}, l_{c1} \cos q_{a1} \dot{q}_{a1}, 0]^T \quad (47)$$

$$\mathbf{t}_2 = [0, 0, \dot{q}_{a2}, -l_{c2} \sin q_{a2} \dot{q}_{a2}, l_{c2} \cos q_{a2} \dot{q}_{a2}, 0]^T \quad (48)$$

$$\mathbf{t}_3 = [0, 0, \dot{q}_{a3}, -l_{c3} \sin q_{a3} \dot{q}_{a3}, l_{c3} \cos q_{a3} \dot{q}_{a3}, 0]^T \quad (49)$$

$$\mathbf{t}_4 = [0, 0, \dot{q}_{b1}, -l \sin q_{a1} \dot{q}_{a1} - l_{c4} \sin q_{\delta 1} \dot{q}_{\delta 1}, l \cos q_{a1} \dot{q}_{a1} + l_{c4} \cos q_{\delta 1} \dot{q}_{\delta 1}, 0]^T =$$

$$[0, 0, \dot{q}_{b1}, \dot{x} + (l - l_{c4}) \sin q_{b1} \dot{q}_{b1}, \dot{y} - (l - l_{c4}) \cos q_{b1} \dot{q}_{b1}, 0]^T \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_5 &= [0, 0, \dot{q}_{b2}, -l \sin q_{a2} \dot{q}_{a2} - l_{c5} \sin q_{b2} \dot{q}_{b2}, l \cos q_{a2} \dot{q}_{a2} + l_{c5} \\
&\quad \cos q_{b2} \dot{q}_{b2}, 0]^T = \\
&= [0, 0, \dot{q}_{b2}, \dot{x} + (l - l_{c5}) \sin q_{b2} \dot{q}_{b2}, \dot{y} - (l - l_{c5}) \cos q_{b2} \dot{q}_{b2}, \\
&\quad 0]^T \quad (52) \\
\mathbf{t}_6 &= [0, 0, \dot{q}_{b3}, -l \sin q_{a3} \dot{q}_{a3} - l_{c6} \sin q_{b3} \dot{q}_{b3}, l \cos q_{a3} \dot{q}_{a3} + l_{c6} \\
&\quad \cos q_{b3} \dot{q}_{b3}, 0]^T = \\
&= [0, 0, \dot{q}_{b3}, \dot{x} + (l - l_{c6}) \sin q_{b3} \dot{q}_{b3}, \dot{y} - (l - l_{c6}) \cos q_{b3} \dot{q}_{b3}, \\
&\quad 0]^T \quad (53)
\end{aligned}$$

2.4 运动螺旋映射关系

该平面并联机构的运动螺旋映射矩阵 $\mathbf{T}_i$ 将二维广义速度映射到连杆运动螺旋,通过各个运动螺旋对广义速度 $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}, \dot{y}]^T$ 求偏微分来计算,得到的皆为 6×2 矩阵。

求解如下:

$$\mathbf{T}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{t}_i}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \quad (54)$$

由式(54)来推导系统 6 个刚体杆的运动螺旋映射关系,结果如下:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ n_{11} & n_{21} \\ -l_{c1} \sin q_{a1} n_{11} & -l_{c1} \sin q_{a1} n_{21} \\ l_{c1} \cos q_{a1} n_{11} & l_{c1} \cos q_{a1} n_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ n_{12} & n_{22} \\ -l_{c2} \sin q_{a2} n_{12} & -l_{c2} \sin q_{a2} n_{22} \\ l_{c2} \cos q_{a2} n_{12} & l_{c2} \cos q_{a2} n_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ n_{13} & n_{23} \\ -l_{c3} \sin q_{a3} n_{13} & -l_{c3} \sin q_{a3} n_{23} \\ l_{c3} \cos q_{a3} n_{13} & l_{c3} \cos q_{a3} n_{23} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ n_{31} & n_{41} \\ 1 + (l - l_{c4}) \sin q_{b1} n_{31} & (l - l_{c4}) \sin q_{b1} n_{41} \\ - (l - l_{c4}) \cos q_{b1} n_{31} & 1 - (l - l_{c4}) \cos q_{b1} n_{41} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ n_{32} & n_{42} \\ 1 + (l - l_{c5}) \sin q_{b2} n_{32} & (l - l_{c5}) \sin q_{b2} n_{42} \\ - (l - l_{c5}) \cos q_{b2} n_{32} & 1 - (l - l_{c5}) \cos q_{b2} n_{42} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ n_{33} & n_{43} \\ 1 + (l - l_{c6}) \sin q_{b3} n_{33} & (l - l_{c6}) \sin q_{b3} n_{43} \\ - (l - l_{c6}) \cos q_{b3} n_{33} & 1 - (l - l_{c6}) \cos q_{b3} n_{43} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

当 $i = 1, 2, 3$ 时,过程变量的表达式为:

$$\dot{\mathbf{p}}_{ai} = \frac{(x - x_{Ai}) \dot{x} + (y - y_{Ai}) \dot{y}}{d_i \sqrt{4l^2 - d_i^2}} + \frac{(x - x_{Ai}) \dot{y} - (y - y_{Ai}) \dot{x}}{d_i^2} \quad (61)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{bi} = \frac{1}{(x - x_{Ai} - l \cos q_{ai})^2} [\dot{y}(x - x_{Ai} - l \cos q_{ai}) - \dot{x}(y - y_{Ai} - l \sin q_{ai}) + l \dot{p}_{ai} (l + x_{Ai} \cos q_{ai} + y_{Ai} \sin q_{ai} - x \cos q_{ai} - y \sin q_{ai})] \quad (62)$$

$$n_{1i} = \frac{(x - x_{Ai})}{d_i \sqrt{4l^2 - d_i^2}} - \frac{(y - y_{Ai})}{d_i^2} \quad (63)$$

$$n_{2i} = \frac{(y - y_{Ai})}{d_i \sqrt{4l^2 - d_i^2}} + \frac{(x - x_{Ai})}{d_i^2} \quad (64)$$

$$n_{3i} = [-(y - y_{Ai} - l \sin q_{ai}) + (l + x_{Ai} \cos q_{ai} + y_{Ai} \sin q_{ai} - x \cos q_{ai} - y \sin q_{ai}) \ln l_{1i}] / (x - x_{Ai} - l \cos q_{ai})^2 \quad (65)$$

$$n_{4i} = [(x - x_{Ai} - l \cos q_{ai}) + (l + x_{Ai} \cos q_{ai} + y_{Ai} \sin q_{ai} - x \cos q_{ai} - y \sin q_{ai}) \ln l_{2i}] / (x - x_{Ai} - l \cos q_{ai})^2 \quad (66)$$

3 最小化最大驱动力优化

最小化最大驱动力法优化是冗余驱动力(矩)优化中用以解决驱动器物理极限的方法,即无穷大范数解。与欧几里得范数解^[23]相比,无穷大范数求解最小化驱动力的最大元素,物理极限意义相对前者更明确,具有低力矩绝对值、驱动力均匀分布的优点。

优化问题表示为:

$$\min_{\tau_a} \|\boldsymbol{\tau}_a\|_{\infty} \quad (67)$$

式中: $\boldsymbol{\tau}_a$ —驱动力(矩)。

受等式约束为:

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\tau}_a = \boldsymbol{\tau} \quad (68)$$

和不等式约束为:

$$|d_i^T \tau_a| \leq d_i^T \tau_{a\lim}, i=1, \dots, 3 \quad (69)$$

式中: A^T —等式约束矩阵; d_i^T —不等式约束矩阵; $\tau_{a\lim}$ —驱动力(矩)最大值。

为了提高计算效率,笔者引入一种新标量 $s \geq 0$ 来替换 $\|\tau_a\|_\infty$ 的值,因此,初始问题转变成以如下形式存在:

$$\min c^T \begin{bmatrix} \tau_a \\ s \end{bmatrix} \quad (70)$$

其中: $c = [0, 0, 0, 1]^T$ 。

受不等式约束:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1_3 \\ -1 & -1_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_a \\ s \end{bmatrix} \leq 0_6 \quad (71)$$

和等式约束:

$$[A^T \quad 0_2] \begin{bmatrix} \tau_a \\ s \end{bmatrix} = \tau \quad (72)$$

以及不等式约束:

$$d_i^T \tau_a \leq d_i^T \tau_{a\lim}, i=1, \dots, 3 \quad (73)$$

式中: $0_6, 0_3$ —6 和 3 维零阵列。

4 系统仿真

根据 GB—T12642—2001《工业机器人性能规范》,测试轨迹的形状应为直线或圆。因此,系统仿真采用经典圆轨迹来描述该平面机器人动平台的运动。

跟踪的圆轨迹,相对于固定坐标系,可给出:

$$(x - 0.2165)^2 + (y - 0.25)^2 = 0.07^2 \quad (74)$$

即圆心点(0.2165, 0.25),半径 $r = 0.07$ m。运行过程采用三段(加速、滑行、减速)梯形速度轨迹。从而得到驱动关节变量和广义坐标变量的相对关系解析解。相应的广义坐标位置和速度、加速度,及作用到动平台点 O 的力可分别计算求解。

笔者采用圆轨迹跟踪仿真,驱动关节的位置、速度、加速度如图 3 所示。

由图 3 可得:机构各支链角位移变换连续平缓;各支链速度变化连续,第一支链变化最显著;该支链运动状态变化明显。

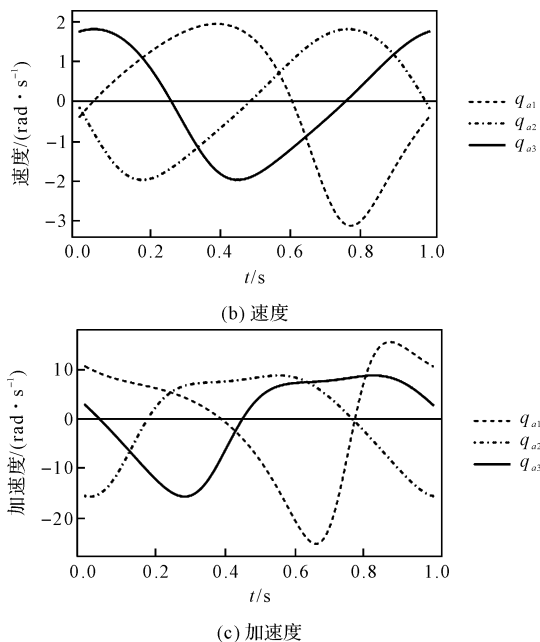
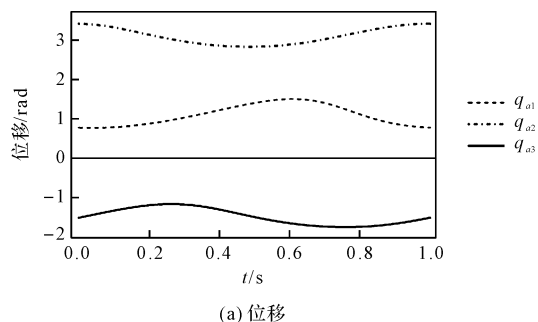


图 3 驱动关节轨迹跟踪运动仿真

最小化最大驱动力优化的驱动器输出力矩如图 4 所示。

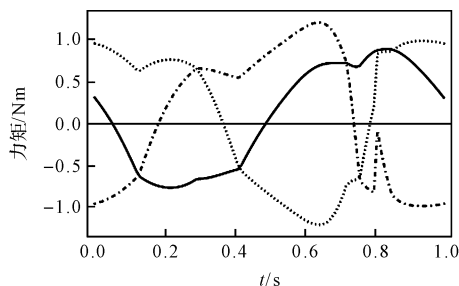


图 4 驱动关节驱动力矩(无穷大范数)

由图 4 可得:无穷大范数法其最大驱动力矩在 1.2 Nm 左右,其中第二支链驱动在 0.85 s 附近有一个突变,是由于无穷大范数求解引起。

用于比对的欧几里得范数法求解驱动力结果,如图 5 所示。

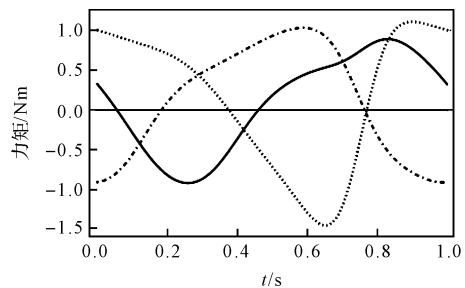


图 5 驱动关节驱动力矩(欧几里得范数)

采用欧几里得范数,最大驱动力矩在 1.5 Nm,超过无穷大范数法 25%。

5 结束语

该研究采用了闭环矢量法推导冗余驱动 3RRR 并联机构的运动学方程,应用了螺旋理论建立逆动力学

方程,采用了无穷大范数法,解决了冗余系统的驱动力求解不唯一问题,并通过圆轨迹跟踪进行了仿真。

研究结果表明:

(1) 基于螺旋理论将自然正交补方法应用到冗余驱动系统的动力学建模,并以典型的平面冗余驱动3RRR并联机构为例,给出了推导步骤和过程。得益于动力学公式中约束力螺旋的消除,该自然正交补建模具有系统高效、中间变量少等优点;

(2) 在机构的逆动力学方程基础上,采用无穷大范数法来最小化各驱动器驱动力矩的最大极值,最大驱动器功率由1.5 Nm降低到1.2 Nm,减小20%,大大降低了驱动器功率要求;

(3) 该自然正交补方法不仅适用于平面冗余驱动机构,也适用于空间冗余驱动机构,针对超冗余机构也有效。

针对冗余驱动的复杂多链过约束并联机构,在后续的研究中,笔者将搭建3RRR原理样机,开展其鲁棒控制律设计,以进一步研究机构的离线和在线动力学参数辨识方法。

参考文献 (References):

- [1] 吴 军,李铁民,王立平. 驱动冗余并联机床的性能分析与控制[M]. 北京:科学出版社,2019.
- [2] 高 峰,郭为忠. 中国机器人的发展战略思考[J]. 机械工程学报,2016,52(7):1-5.
- [3] 田 波,王尧尧,朱康武,等. 绳驱动机械臂动力学建模及ADAMS 仿真研究[J]. 机电工程,2019,36(8):803-808.
- [4] KHALIL W, IBRAHIM O. General solution for the dynamic modeling of parallel robots[J]. **Journal of Intelligent and Robotic Systems**,2007,49(1):19-37.
- [5] 柴馨雪,杨 泳,徐灵敏,等. 2-UPR-RPU 并联机器人的动力学建模与性能分析[J]. 机械工程学报,2020,56(13):110-119.
- [6] 倪仕全,田大鹏. 3-PRS 并联机构的动力学惯量耦合特性分析[J]. 机电工程,2021,38(7):815-821.
- [7] CHENG Hui, YIU YK, LI Ze-xiang. Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators [J]. **IEEE/ASME Transactions on Mechatronics**, 2003, 8 (4): 483-491.
- [8] MILLER K. Optimal design and modeling of spatial parallel manipulators[J]. **The International Journal of Robotics Research**,2004,23(2):127-140.
- [9] KANE T R, LEVINSON D A. The use of Kane's dynamical equations in robotics [J]. **The International Journal of Robotics Research**,1983,2(3):3-21.
- [10] MLADENOVA C D. Applications of Lie group theory to the modeling and control of multibody systems[J]. **Multibody System Dynamics**,1999,3(4):367-380.
- [11] WANG Jie-gao, GOSSELIN C, CHENG Li. Modeling and simulation of robotic systems with closed kinematic chains using the virtual spring approach [J]. **Multibody System Dynamics**,2002,7(2):145-170.
- [12] GALLARDO J, RICO J, FRISOLI A, et al. Dynamics of parallel manipulators by means of screw theory [J]. **Mechanism and Machine Theory**, 2003, 38 (11): 1113-1131.
- [13] STAIU S, ZHANG Dan. A novel dynamic modelling approach for parallel mechanisms analysis [J]. **Robotics and Computer Integrated Manufacturing**,2008,24(1):167-172.
- [14] LOPEZ A M, ALMEIDA F. The generalized momentum approach to the dynamic modeling of a 6-dof parallel manipulator [J]. **Multibody System Dynamics**,2009,21(2):123-146.
- [15] GOSSELIN C, SCHREIBER LT. Redundancy in parallel mechanisms: a review[J]. **Applied Mechanics Reviews**, 2018,70(1):1-15.
- [16] 辛桂阳,钟国梁,王恒升,等. 基于对偶二次规划的六足并联机器人驱动力分配[J]. 机械工程学报,2018,54(7):20-27.
- [17] ANGELES J. Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods, and algorithms[M]. Cham, Switzerland: Springer,2014.
- [18] KOECK S, SCHUMACHER W. A Parallel xy Manipulator with Actuation Redundancy for High-Speed and Active-Stiffness Applications [C]. 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Leuven, Belgium,1998.
- [19] 曹劲草. 一种红枣去核机上料机构的设计与分析[J]. 包装与食品机械,2021,39(1):62-65.
- [20] GHORBEL F, CHETELAT O, LONGCHAMP R. A reduced model for constrained rigid bodies with application to parallel robots[J]. **IFAC Proceedings Volumes**,1994,27(14):57-62.
- [21] TIAN Qiang, FLORES P, LANKARANI H M. A comprehensive survey of the analytical, numerical and experimental methodologies for dynamics of multibody mechanical systems with clearance or imperfect joints[J]. **Mechanism and Machine Theory**,2018,12(2):1-57.
- [22] MULLER A. Internal preload control of redundantly actuated parallel manipulators—its application to backlash avoiding control [J]. **IEEE Transactions on Robotics**, 2005,21(4):668-677.
- [23] WANG Yaojun, BELZILE B, ANGELES J, et al. The modeling of redundantly actuated mechanical systems[J]. **Journal of Mechanisms and Robotics**, 2019, 11 (6): 61-65.

[编辑:司红岩]

本文引用格式:

王耀军,张海峰. 基于自然正交补的冗余驱动并联机构动力学建模[J]. 机电工程,2022,39(10):1440-1447.

WANG Yao-jun, ZHANG Hai-feng. Dynamics modeling of redundantly-actuated parallel robot based on natural orthogonal complement [J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2022,39(10):1440-1447.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>