

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2022.10.012

# 1T1R 并联机构拓扑设计及其运动学、 动力学分析\*

华 耀, 沈惠平\*, 李 菊, 李 涛, 陈炳伟, 邓嘉鸣  
(常州大学 现代机构学研究中心, 江苏 常州 213164)

**摘要:**为了研发和推广应用一平移—转动(1T1R)并联机构(PM),提出了一种新型 1T1R 并联机构,并对该并联机构进行了运动学和动力学性能分析。首先,根据基于方位特征(POC)方程的并联机构拓扑设计理论与方法,设计出了一种具有符号式位置正解,且运动解耦的两自由度一平移—转动并联机构,并对该机构进行了拓扑分析,计算出了其方位特征(POC)、自由度、耦合度等拓扑特征;然后,根据基于拓扑特征的运动学建模方法,求解了机构的符号式位置正反解;基于雅可比矩阵分析了机构的奇异性,基于位置正解公式计算分析了机构的工作空间;最后,采用基于虚功原理的序单开链法,对该机构进行了动力学建模,求解了该机构的驱动力矩和两个 SKC 连接处运动副的支反力。研究表明:相比基于反解计算工作空间,基于位置正解计算工作空间的效率可提高 30.7%;对该机构进行运动学和动力学研究,可以为其结构设计及样机研制奠定基础。

**关键词:**1T1R 并联机构;方位特征;自由度;机构工作空间;机构奇异性;序单开链法;运动学分析

中图分类号:TH112

文献标识码:A

文章编号:1001-4551(2022)10-1424-09

## Topological design, kinematic and dynamics performance analysis of 1T1R parallel mechanism

HUA Yao, SHEN Hui-ping, LI Ju, LI Tao, CHEN Bing-wei, DENG Jia-ming  
(Research Center for Advanced Mechanisms, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

**Abstract:** In order to develop and apply one-translation and one-rotation (1T1R) parallel mechanism (PM), a new 1T1R PM was proposed and kinematic and kinetic properties analysis were performed. Firstly, a 2 degrees of freedom (DOF) PM featured one-translation and one-rotation PM with symbolic kinematics was designed, according to the topological structure design theory for PM based on position and orientation characteristic (POC) equations. Then, the main topological characteristics such as the POC, DOF and the coupling degree ( $k$ ) of the PM were analyzed. Further, by kinematic modeling method based on topological characteristics, the symbolic positive and negative position solution were obtained. The singularity of the PM was analyzed based on Jacobian matrix, and the workspace of the PM was calculated based on the positive position formula. Finally, the ordered single-open-chain method based on virtual work principle was used to model the dynamics of the PM, from which the actuated torque and reaction forces of the at the joint of two SKC were solved. The results show that the efficiency of the working space based on the position positive solution formula is improved by 30.7% compared with the reverse solution formula. The kinematics and dynamics research of this institute has laid a foundation for the structure design and prototype development.

**Key words:** one-translation and one-rotation (1T1R) parallel mechanism (PM); position and orientation characteristic (POC); degrees of freedom (DOF); mechanism workspace; mechanism singularity; ordered single-open-chain method; kinematic analysis

收稿日期:2022-03-20

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51975062)

作者简介:华耀(1997-),男,江苏淮安人,硕士研究生,主要从事并联机器人方面的研究。E-mail:2446130391@qq.com

通信联系人:沈惠平,男,博士,教授,博士生导师。E-mail:shp65@126.com

## 0 引言

由于驱动元件少、制造方便,两自由度(DOF)的一平移一转动(1T1R)并联机器人机构具有较高的实用价值。

目前,国内外对 2-DOF 1T1R 并联机构的研究较少。陈海等人<sup>[1]</sup>通过特殊布置驱动,综合了各向同性的两支链空间 1T1R 并联机构,其具有运动完全解耦的特性,但未对其进行过多的运动分析。尹小琴等人<sup>[2]</sup>通过添加辅助支链,得到了一种四支链 1T1R 空间机构,并对其进行了位置和精度分析;但其位置的分析只进行了反解模型求解。LI Ju 等人<sup>[3]</sup>采用基于 POC 的拓扑结构综合方法,设计了较多的 1T1R 空间并联机构;但没有分析该机构的特性(例如,是否运动解耦、是否含有辅助支链、移动轴线与转动轴线的方位关系,等)。DALLALIBERA F 等人<sup>[4]</sup>设计了含被动支链的空间三支链 1T1R 并联机构,其移动轴线与转动轴线不存在平行、垂直等特殊关系,使其运动分析较为困难,且不具有运动解耦特性。吴巍<sup>[5]</sup>提出了一种四支链空间 1T1R 并联机构,并对其进行了位置分析;但该研究并未对其运动学进行深入研究(如奇异性分析、工作空间分析等)。

因此,还有待于对新型 1T1R 并联机构做进一步的深入研究。

动力学研究方法主要有 Hamilton 正则方程<sup>[6]</sup>、Kane 方法<sup>[7]</sup>、Lagrange 方程<sup>[8-10]</sup>、Newton-Euler 法<sup>[11,12]</sup>、虚功原理<sup>[13-15]</sup>等。其中,虚功原理方法能简洁直观地建立动力学模型,且冗杂信息较少。

WANG Jie-gao 等人<sup>[16]</sup>基于虚功原理法,对 Gough-Stewart 机构进行了动力学分析,该方法比传统的 Newton-Euler 法更具优越性。LI Meng 等人<sup>[17]</sup>基于虚功原理法,提出了 Tricept 和 TriVariant 机器人的逆动力学公式,并进一步完善了动力学研究体系。KAIANI H 等人<sup>[18]</sup>基于虚功原理,改进了动力学普遍方程,减少了动力学计算时间,且提高了动力学方程的准确性。刘晓飞等人<sup>[19]</sup>基于虚功原理,建立了 6PUS 机构的动力学模型,并对该机构动力学性能进行了分析,为机构的研发提供了理论基础。黄凯伟等人<sup>[20]</sup>运用基于虚功原理的序单开链法动力学建模方法,对全由转动副组成的空间两平移一转动(2T1R)并联机构进行了动力学建模与求解;该方法以子运动链(SKC)为基本单元,因而思路清晰,而传统的虚功原理无法直接得到机构运动副的支反力。

为研发和推广应用一平移一转动(1T1R)并联机构,笔者根据基于方位特征(POC)方程的并联机构拓扑设计理论,提出一种 2-DOF 空间 1T1R 并联机构;同时,对该机构进行拓扑、奇异性、工作空间分析;最后,运用基于虚功原理的序单开链法建立该机构动力学模型,对该机构的驱动力矩以及子运动链(SKC)连接处的运动副反力进行求解。

## 1 机构设计及拓扑分析

### 1.1 机构设计

笔者设计的 2-DOF 平移一转动并联机构(1T1RPM),它由一条混合支链 I 和一条约束支链 II 并联地连接于动平台 1、静平台 0 之间组成<sup>[21]</sup>,如图 1 所示。

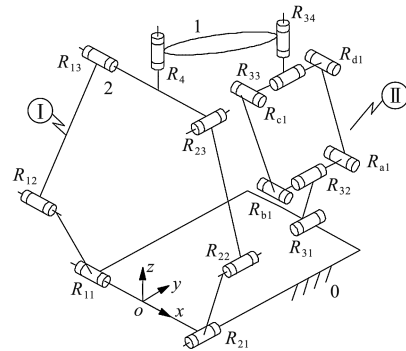


图 1 2-DOF 1T1R 并联机构

混合支链 I 中的子链一( $R_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13}$ )与子链二( $R_{21} \parallel R_{22} \parallel R_{23}$ ),并联连接为一个空间子并联机构(记为:3R-3R 机构),其静平台 0 上的转动副  $R_{11}$  的轴线经过子链二的运动平面,且  $R_{11} \perp R_{21}$ ;再在空间子并联机构输出杆 2 的垂直杆上用转动副  $R_4$  与动平台 1 的一端连接,即转动副  $R_4$  轴线的方向,同时垂直静平台 0 及转动副  $R_{13}$  的轴线。

约束支链 II 包含一个由 4 个转动副组成的平行四边形( $R_{a1}R_{b1}R_{c1}R_{d1}$ ),记作  $pa$ ,其一条短边上串联轴线相互平行的转动副  $R_{32}$  与  $R_{31}$ ,转动副  $R_{31}$  又与静平台 0 连接;另一条短边上串联轴线相互垂直的转动副  $R_{33}$  与  $R_{34}$ , $R_{34}$  连接动平台 1 的另一端。

静平台 0 上三个转动副的关系是: $R_{11} \perp R_{21} \parallel R_{31}$ ,动平台 1 上两个转动副的关系是: $R_4 \parallel R_{34}$ 。

### 1.2 机构拓扑分析

#### 1.2.1 机构的 POC 集计算

(1) POC 集的计算公式<sup>[22]59-60</sup>

串、并联机构 POC 方程分别为:

$$M_{bi} = \bigcup_{i=1}^m M_{Ji} \quad (1)$$

$$M_{pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{bi} \quad (2)$$

式中： $M_{Ji}$ —第  $i$  个运动副的 POC 集； $M_{bi}$ —第  $i$  条支链末端 POC 集； $M_{pa}$ —机构动平台的 POC 集。

(2) 机构 POC 集的计算

①两条支链的拓扑结构分别为：

$$b_I : (R_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13} \perp R_{23} \parallel R_{22} \parallel R_{21} - R_4 ;$$

$$b_{II} : R_{31} \parallel R_{32} (-Pa) \parallel R_{33} \perp R_{34} \circ$$

②支链末端的 POC 集

笔者取基点为转动副  $R_4$  轴线上一点,则两支链末端构件 POC 集由式(1,2)分别为：

$$M_b =$$

$$\left[ \begin{matrix} t^2(\perp R_{11}) \\ r^1(\parallel R_{11}) \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} t^2(\perp R_{21}) \\ r^1(\parallel R_{21}) \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} t^0 \\ r^1(\parallel R_4) \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} t^1(\perp R_4) \\ r^1(\parallel R_4) \end{matrix} \right];$$

$$M_b =$$

$$\left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{31}) \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} t^1(\perp R_{34}) \\ r^1(\parallel R_{34}) \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^3(\parallel \diamond(R_{11}, R_{34})) \end{matrix} \right] \circ$$

③动平台的 POC 集由式(2)得：

$$M_{pa} = M_b \quad M_b =$$

$$\left[ \begin{matrix} t^1(\parallel R_4) \\ r^1(\parallel R_4) \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{31}, R_{34})) \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} t^1(\parallel R_4) \\ r^1(\parallel R_4) \end{matrix} \right] \circ$$

因此,动平台 1 具有沿平行于  $R_4$  轴线方向的一维平移,以及绕  $R_4$  轴线一维转动的输出特性。

1.2.2 机构的自由度

(1) 并联机构的全周 DOF 公式<sup>[22]77</sup>为：

$$\xi_{Lj} = \dim. \left\{ \left( \bigcap_{i=1}^j M_{bi} \right) \cup M_{b_{(j+1)}} \right\} \quad (3)$$

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{Lj} \quad (4)$$

式中： $F$ —机构自由度； $f_i$ —第  $i$  个运动副的自由度； $v = m - n + 1$  ( $m$ —运动副数； $v$ —独立回路数； $n$ —构件数)； $\xi_{Lj}$ —第  $j$  个独立回路的独立位移方程数； $\bigcap_{i=1}^j M_{bi}$ —前  $j$  条支链组成的子并联机构 POC 集； $M_{b_{(j+1)}}$ —前  $j + 1$  条支链末端构件的 POC 集。

(2) 机构的 DOF 确定

①第 1 回路(第 1 子并联机构)为混合支链 I 中的 3R-3R 回路,其  $\xi_{L1}$  由式(3)得：

$$\xi_{L1} = \dim \left\{ \left[ \begin{matrix} t^2(\perp R_{11}) \\ r^1(\parallel R_{11}) \end{matrix} \right] \cup \left[ \begin{matrix} t^2(\perp R_{21}) \\ r^1(\parallel R_{21}) \end{matrix} \right] \right\} =$$

$$\dim \left\{ \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{11}, R_{21})) \end{matrix} \right] \right\} = 5 \circ$$

因此,第 1 子并联机构的自由度由式(4)得： $F_1 =$

$$\sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{Lj} = 6 - 5 = 1 \circ$$

②第 2 回路(第 2 子并联机构,即本机构)由第 1 子并联机构、转动副  $R_4$  与约束支链 II 构成,其  $\xi_{L2}$  由式(3)得：

$$\xi_{L2} =$$

$$\dim \left\{ \left[ \begin{matrix} t^1(\parallel R_4) \\ r^1(\parallel R_4) \end{matrix} \right] \cup \left[ \begin{matrix} t^1(\perp R_{34}) \\ r^1(\perp R_{34}) \end{matrix} \right] \cup \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{31}, R_{34})) \end{matrix} \right] \right\} =$$

$$\dim \left\{ \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{31}, R_{34})) \end{matrix} \right] \right\} = 5 \circ$$

因此,机构的自由度由式(4)得： $F = \sum_{i=1}^m f_i -$

$$\sum_{j=1}^2 \xi_{Lj} = (6 + 6) - (5 + 5) = 2 \circ$$

故当取静平台 0 上 2 个转动副,例  $R_{11}$  (或  $R_{21}$ )、 $R_{31}$  为驱动副时,动平台 1 可产生沿平行于  $R_4$  轴线方向的一平移以及绕转动副  $R_4$  方向的一转动。

1.2.3 机构耦合度

(1) 耦合度计算公式<sup>[22]109</sup>

由基于单序开链(SOC)的机构组成原理知,任一机构可分解为约束度为正、零、负的三种有序单开链(SOC),第  $j$  个 SOC <sub>$j$</sub>  的约束度定义为：

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{Lj} = \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = +1, +2, +3 \end{cases} \quad (5)$$

式中： $m_j$ —第  $j$  个 SOC <sub>$j$</sub>  的运动副数； $I_j$ —第  $j$  个 SOC <sub>$j$</sub>  的驱动副数。

因此,一组有序的  $v$  个 SOC 可组成 1 个独立回路数为  $v$  的子运动链 SKC<sup>[23]44-45</sup>,SKC 耦合度为：

$$k = \Delta_j^+ = |\Delta_j^-| = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \quad (6)$$

式中： $\min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\}$ —SKC 分解为  $v$  个 SOC( $\Delta_j$ ),可有多种分配方案,取  $\sum_{j=1}^v |\Delta_j|$  为最小者。

(2) 机构的耦合度确定

根据以上计算结果( $\xi_{L1} = 5, \xi_{L2} = 5$ ),因此,这两个

回路的约束度可由式(5)计算为： $\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} =$

$$6 - 1 - 5 = 0; \Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L2} = 6 - 1 - 5 = 0 \circ$$

显然,第 1、2 回路可独自构成 SKC,即 SKC<sub>1</sub>,

SKC<sub>2</sub>,其耦合度由式(6)得:  $k_1 = k_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r |\Delta_j| = \frac{1}{2} \times (0 + 0) = 0$ 。

因此,两个 SKC 可分别求得符号式位置正解。

## 2 机构位置分析

### 2.1 坐标系建立及参数标注

机构的运动学建模如图 2 所示。

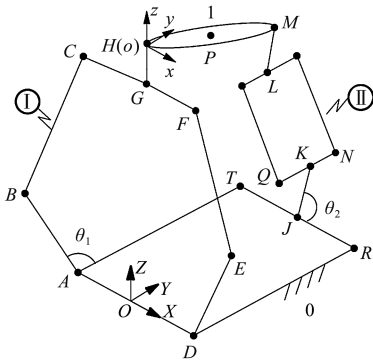


图 2 1T1R 并联机构的运动学建模

笔者设长方形静平台 0 的短长边分别为  $AD = 2a$ ,  $AT = 2b$ ,  $J$  为  $TR$  中点; 设动平台 1 的长  $HM = 2c$ , 点  $P$  为  $HM$  的中点; 同时设  $AB = BC = l_1$ ,  $DE = EF = l_2$ ,  $CF = AD = 2a$ ,  $GH = l_3$ ,  $JK = l_4$ ,  $KL = l_5$ ,  $LM = l_6$ ,  $QN = 2d$ ;

设静坐标系  $O - XYZ$  原点为静平台短边  $AD$  的中点  $o$ ,  $X$  轴沿  $OD$  方向为正,  $Y$  轴沿  $OJ$  连线方向为正;  $H$  点为动坐标系  $o - xyz$  原点,  $x$  轴与静坐标系  $X$  轴平行且方向一致,  $y$  轴与静坐标系  $Y$  轴平行且方向一致(其中,  $Z, z$  轴由螺旋法则确定);

设动平台 1 绕动坐标系  $z$  轴正方向逆时针转动的输出角度为  $\alpha$ ; 2 个驱动副  $R_{11}$ 、 $R_{31}$  输入角度分别为  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 。其中,  $\theta_1$  为  $AB$  与  $Y$  轴正向之间的夹角,  $\theta_2$  为  $JK$  与  $X$  轴正向之间的夹角。

### 2.2 机构位置正解求解

该机构位置正解的求解,可转换为两个 SKC 内回路位置的求解<sup>[23]64-67</sup>,即:已知 2 个输入转动副分别为  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ ,求动平台的位置  $z$  及转角  $\alpha$ 。

#### 2.2.1 SKC<sub>1</sub> 位置求解

第 1 回路( $A - B - C - F - E - D$ )上各点坐标为:

$$A = (-a, 0, 0); D = (a, 0, 0); B = (-a, l_1 \cos \theta_1,$$

$$l_1 \sin \theta_1),$$

$$C = (-a, 0, z - l_3); G = (0, 0, 2l_1 \sin \theta_1)。$$

由几何约束  $BC = l_1$  建立位置方程,并解得:

$$z = 2l_1 \sin \theta_1 + l_3 \quad (7)$$

#### 2.2.2 SKC<sub>2</sub> 位置求解

第 2 回路( $H - M - L - N - K - Q - J$ )上各点坐标为:

$$J = (0, 2b, 0); H = (0, 0, z);$$

$$P = (c \sin \alpha, c \cos \alpha, 2l_1 \sin \theta_1 + l_3);$$

$$M = (2c \sin \alpha, 2c \cos \alpha, z);$$

$$L = (2c \sin \alpha, 2c \cos \alpha, z - l_6);$$

$$K = (l_4 \cos \theta_2, 2b, l_4 \sin \theta_2)。$$

由几何约束  $KL = l_5$  建立位置方程,并解得:

$$\alpha = 2 \arctan \left( \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \right) \quad (8)$$

其中:  $A = -2l_4 \cos \theta_2$ ;  $B = -8bc$ ;  $C = 4c^2 + 4b^2 - l_5^2 + l_4^2 \cos^2 \theta_2 + (z - l_6 - l_4 \sin \theta_2)^2$ 。

由式(7,8)可知: $z$  有一个解,而  $\alpha$  有两个解,故正解有两组数值。

### 2.3 机构位置反解求解

机构位置逆解为:已知动平台 1 的位置  $z$  及转角  $\alpha$ ,求  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 。

由式(7)得:

$$\theta_1 = \arcsin \left( \frac{z - l_3}{2l_1} \right) \quad (9)$$

由式(8)得:

$$\theta_2 = 2 \arctan \left( \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + S^2 - T^2}}{T - S} \right) \quad (10)$$

其中:  $R = 2l_4(z - l_6)$ ;  $S = 2l_4(2c \cos \alpha - 2b)$ ;  $T = 4c^2 + 4b^2 - l_5^2 + l_4^2 - 8bcc \cos \alpha + (z - l_6)^2$ 。

由式(9,10)可知: $\theta_1$  有 1 个解,而  $\theta_2$  有 2 个解,故该机构反解求解时有 2 种构型。

### 2.4 正逆解验算

设机构的结构参数为:  $a = 30 \text{ mm}$ ,  $b = 50 \text{ mm}$ ,  $c = 40 \text{ mm}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$ ,  $l_1 = 50 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 60 \text{ mm}$ ,  $l_3 = 5 \text{ mm}$ ,  $l_4 = 60 \text{ mm}$ ,  $l_5 = 45 \text{ mm}$ ,  $l_6 = 15 \text{ mm}$ ; 设驱动副输入角为:  $\theta_1 = 45.3670^\circ$ 、 $\theta_2 = 66.6191^\circ$ 。

笔者用 MATLAB 算出机构正解,如表 1 所示。

表 1 机构位置正解

No	Z/mm	$\alpha/(^\circ)$
1	76.162 2	-11.000 8
2	76.162 2	37.786 9

笔者将表 1 中的 No. 1 位置正解数值代入式(9,10),用 MATLAB 求解得机构反解,如表 2 所示。

表 2 机构位置反解数值

No	$\theta_1/(^\circ)$	$\theta_2/(^\circ)$
1 *	45.367 0	66.619 3
2	45.367 0	141.409 8

由此可见,表 2 中 No. 1 \* 的逆解数值,与正解计算给定的值一致。

### 3 机构奇异性分析

避免机构的奇异位形是保证机构正常工作的基本要求之一,笔者采用 Jacobian 法分析该机构的奇异位形<sup>[24]375-376</sup>。

设动平台的输出速度为  $v = [z \ \alpha]^T$ , 驱动副输入角速度  $\omega = [\theta_1 \ \theta_2]^T$ , 则对支链 I、II 分别满足的几何约束 ( $BC = l_1, KL = l_5$ ) 方程进行微分后为:

$$J_p v = J_q \omega \quad (11)$$

$$\text{其中: } J_p = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}; J_q = - \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix};$$

$$f_{11} = 2(Z_C - Z_B); f_{12} = 0; f_{21} = 2(Z_L - Z_K);$$

$$f_{22} = 4c \cos \alpha (X_L - X_K) - 4c \sin \alpha (Y_L - Y_K);$$

$$g_{11} = 2l_1 \cos \theta_1 (l_3 - z);$$

$$g_{22} = 2l_4 \sin \theta_2 (X_L - X_K) - 2l_4 \cos \theta_2 (Z_L - Z_K)。$$

根据  $J_p, J_q$  矩阵是否奇异,机构的奇异位形可以分为如下 3 类:

(1) 当  $\det(J_q) = 0$  时,会发生输入奇异,有两种情况:

① 当  $\theta_1 = 90^\circ$  即  $BA$  垂直于静平台 0 时,机构存在奇异位置,如图 3 所示。

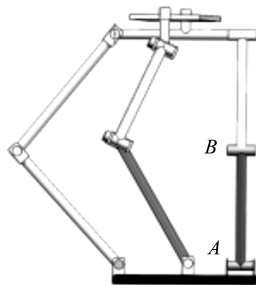


图 3 输入奇异位置

② 当  $\theta_2 = 0^\circ$  或者  $180^\circ$  时,驱动杆 2 达不到该位置,所以该奇异位置不存在。

(2) 当  $\det(J_p) = 0$  时,会发生输出奇异,也有两种情况:

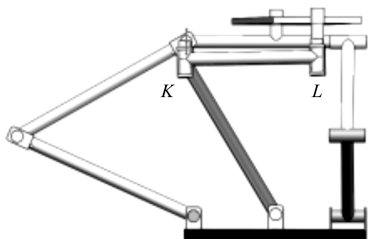


图 4 输出奇异位置

①  $B, C$  点的  $Z$  轴坐标相等时,即  $BC \parallel DO$ , 由于杆件之间干涉达不到该位置,因此,该奇异位置不存在;

②  $K, L$  点的  $Y$  轴坐标相等时,即满足  $KL \parallel DO$  时,机构存在奇异位置,如图 4 所示。

(3)  $\det(J_p) = \det(J_q) = 0$  不存在,即该机构不存在综合奇异位置。

### 4 位置正解工作空间分析

并联机构的可达工作空间是研究并联机构工作性能的一个重要指标。相比基于位置反解公式计算空间,基于位置正解公式计算具有计算量小、计算过程快等优点<sup>[24]376-377</sup>,故笔者采用基于机构位置正解公式计算工作空间,即预先估计设定驱动副范围,通过搜索所有满足约束条件的点,由这些点组成的三维图,即为该机构的工作空间。

设两个驱动副输入范围分别为:  $1/4\pi \leq \theta_1 \leq 3/4\pi, 0 \leq \theta_2 \leq 3/4\pi$ , 根据式(7,8),通过 MATLAB 计算(耗时 848.6 s),可得到该机构动平台 1 中点  $p$  的工作空间,如图 5 所示。

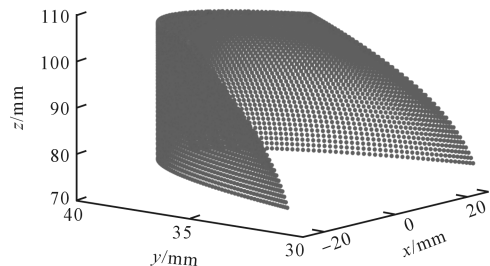


图 5 1T1R 机构的三维工作空间

采用式(9,10)的反解公式计算工作空间耗时 1 225.2 s。由此可见,相比基于位置反解计算工作空间,基于符号式位置正解计算的效率提高了 30.7%。

### 5 机构的速度与加速度分析

#### 5.1 动平台的速度和加速度

当机构不存在奇异位置时,  $J_p$  可逆,由式(11)得动平台原点的输出速度为:

$$v = J_p^{-1} J_q \omega = J \omega \quad (12)$$

为便于后续计算,笔者将动平台的速度矩阵分解为移动矩阵和转动矩阵,即:

$$Z = [0 \ 0 \ z] \text{ 和 } \alpha = [0 \ 0 \ \alpha]。$$

由此,移动矩阵和转动矩阵与原矩阵的关系可表示为:  $Z = G_1 v, \alpha = G_2 v。$

$$\text{其中: } \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这样,动平台的移动和转动速度矩阵可表示为:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{G}_1 \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{G}_2 \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega} \quad (13)$$

然后,笔者将式(11)对时间  $t$  求导,得到动平台  $O'$  点加速度与输入加速度之间的映射关系为:

$$\mathbf{a} = \mathbf{J}_P^{-1} \mathbf{J}_Q \boldsymbol{\omega} - \mathbf{J}_P^{-1} \mathbf{k} \quad (14)$$

其中:  $\mathbf{k} = [k_1 \quad k_2]^T$ ,  $k_1$  和  $k_2$  分别为:

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \theta_1} \cdot \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \cdot \frac{d\theta_1}{dt} \cdot \left( \frac{dz}{dt} \right) + \\ &\frac{\partial}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} \right) \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial \theta_1} \cdot \left( \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} \right) \cdot \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 \quad (15) \\ k_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \\ &\left( \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial}{\partial \theta_2} \cdot \left( \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \cdot \frac{d\theta_2}{dt} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \\ &\left( \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \right) \cdot \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \theta_2} \cdot \left( \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \right) \cdot \frac{d\theta_2}{dt} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \\ &\left( \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \right) \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{\partial}{\partial \theta_2} \cdot \left( \frac{\partial f_3}{\partial \theta_2} \right) \cdot \left( \frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 \quad (16) \end{aligned}$$

## 5.2 杆件的速度与加速度

笔者拟求出机构各杆件的速度与加速度。

### 5.2.1 杆件 AB 的速度与加速度

$B$  点的速度为:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times (l_1 \mathbf{c}_{AB}) \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{v}_A = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ —驱动杆  $AB$  的角速度;  $\mathbf{c}_{AB}$ —杆件的单位矢量。

笔者对式(17)进行求导,得  $B$  点加速度为:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + l_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{AB} \times \mathbf{c}_{AB} + l_1 \boldsymbol{\omega}_{AB} \times (\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{c}_{AB}) \quad (18)$$

式中:  $\mathbf{a}_A = 0$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{AB}$ —驱动杆  $AB$  的角加速度。

于是,杆件  $AB$  质心的速度/加速度分别为:

$$\mathbf{v}_{midAB} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_B, \mathbf{a}_{midAB} = \frac{1}{2} \mathbf{a}_B \quad (19)$$

### 5.2.2 杆件 BC 的速度与加速度

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times (l_1 \mathbf{c}_{BC}) \quad (20)$$

对式(18)两边又乘  $\mathbf{c}_{BC}$ , 得  $BC$  的角速度为:

$$\boldsymbol{\omega}_{BC} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{BC} \times (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_B)}{l_1} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{BC} (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_B)}{l_1} \quad (21)$$

式中:  $\tilde{\mathbf{c}}_{AB}$ —单位向量  $\mathbf{c}_{BC}$  的斜对称矩阵。

将式(20)两边对时间  $t$  求导,可得:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + l_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{BC} \times \mathbf{c}_{BC} + l_1 \boldsymbol{\omega}_{BC} \times (\boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{c}_{BC}) \quad (22)$$

对式(22)两边又乘  $\mathbf{c}_{BC}$ , 得杆件  $BC$  角加速度为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{BC} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{BC} (\mathbf{a}_C - \mathbf{a}_B)}{l_1} \quad (23)$$

由式(20,22)得,杆件  $BC$  质心的速度、加速度为:

$$\mathbf{v}_{midBC} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_C), \mathbf{a}_{midBC} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_C) \quad (24)$$

### 5.2.3 其余构件的速度与加速度

其余构件的速度与加速度的求法类似,故此处不再赘述,直接给出结果。

杆件  $DE$  质心的速度与加速度分别为:

$$\mathbf{v}_{midDE} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_E, \mathbf{a}_{midDE} = \frac{1}{2} \mathbf{a}_E \quad (25)$$

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega}_{DE} \times (l_2 \mathbf{c}_{DE}) \quad (26)$$

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_D + l_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{DE} \times \mathbf{c}_{DE} + l_2 \boldsymbol{\omega}_{DE} \times (\boldsymbol{\omega}_{DE} \times \mathbf{c}_{DE}) \quad (27)$$

式中:  $\mathbf{c}_{DE}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{DE}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{DE}$ —分别为相应构件的单位矢量、角速度和角加速度。

杆件  $EF$  质心的速度与加速度分别为:

$$\mathbf{v}_{midFE} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_F), \mathbf{a}_{midEF} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_E + \mathbf{a}_F) \quad (28)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{EF} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{EF} (\mathbf{v}_F - \mathbf{v}_E)}{l_2}, \boldsymbol{\varepsilon}_{EF} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{EF} (\mathbf{a}_F - \mathbf{a}_E)}{l_2} \quad (29)$$

式中:  $\mathbf{v}_F$ ,  $\mathbf{a}_F$ —点  $F$  的已知速度和加速度。

杆件  $JK$  质心的速度与加速度分别为:

$$\mathbf{v}_{midJK} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_K, \mathbf{a}_{midJK} = \frac{1}{2} \mathbf{a}_K \quad (30)$$

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_J + \boldsymbol{\omega}_{JK} \times (l_4 \mathbf{c}_{JK}) \quad (31)$$

$$\mathbf{a}_K = \mathbf{a}_J + l_4 \boldsymbol{\varepsilon}_{JK} \times \mathbf{c}_{JK} + l_4 \boldsymbol{\omega}_{JK} \times (\boldsymbol{\omega}_{JK} \times \mathbf{c}_{JK}) \quad (32)$$

式中:  $\mathbf{c}_{JK}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{JK}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{JK}$ —相应构件的单位矢量、角速度和角加速度。

杆件  $KL$  质心的速度与加速度分别为:

$$\mathbf{v}_{midKL} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_K + \mathbf{v}_L), \mathbf{a}_{midKL} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_K + \mathbf{a}_L) \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{KL} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{KL} (\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_K)}{l_5}, \boldsymbol{\varepsilon}_{KL} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{KL} (\mathbf{a}_L - \mathbf{a}_K)}{l_5} \quad (34)$$

式中:  $\mathbf{v}_L$ ,  $\mathbf{a}_L$ —点  $L$  的已知速度和加速度。

杆件  $ML$  质心的速度与加速度分别为:

$$\mathbf{v}_{midML} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_K + \mathbf{v}_M), \mathbf{a}_{midML} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_K + \mathbf{a}_M) \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ML} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{ML} (\mathbf{v}_M - \mathbf{v}_L)}{l_6}, \boldsymbol{\varepsilon}_{ML} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{ML} (\mathbf{a}_M - \mathbf{a}_L)}{l_6} \quad (36)$$

式中:  $\mathbf{v}_M$ ,  $\mathbf{a}_M$ —点  $M$  的已知速度和加速度。

杆件  $HM$  质心的速度与加速度分别为:

$$\mathbf{v}_{midML} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_K + \mathbf{v}_M), \mathbf{a}_{midML} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_K + \mathbf{a}_M) \quad (37)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{HM} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{HM} (\mathbf{v}_H - \mathbf{v}_M)}{l_{HM}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{HM} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}_{HM} (\mathbf{a}_H - \mathbf{a}_M)}{l_{HM}} \quad (38)$$

式中： $v_H, a_H$ —点  $H$  的已知速度和加速度。

### 5.3 算例与仿真

笔者给定两个驱动副的运动规律分别为： $\theta_1 = \pi/18 * t + 69 * \pi/180, \theta_2 = \pi/10 * t + 45 * \pi/180$ 。

根据式(12, 14), 笔者用 MATLAB 编程得到动平台基点的速度曲线, 如图 6 所示。

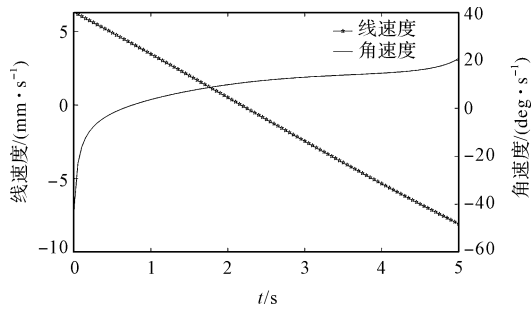


图 6 动平台的位姿速度曲线

动平台的位姿加速度曲线如图 7 所示。

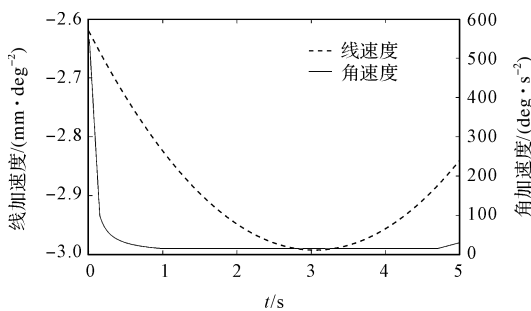


图 7 动平台的位姿加速度曲线

由图 7 可知:

(1) 在 0~5 s 内, 动平台  $o$  点的线速度随时间变化成线性下降;

(2) 在 0~0.2 s 内, 动平台的角速度急速上升; 在 0.2 s~5 s 内, 动平台的角速度趋于平缓上升。

从以上两点可知, 该机构运行稳定性较好。

笔者进一步将机构导入 ADAMS 软件, 对其进行了仿真分析, 结果表明理论值与仿真值一致, 因此验证了上述运动学模型的正确性。

## 6 机构的动力学分析

### 6.1 序单开链法

笔者拟采用基于虚功原理的序单开链法, 对 1T1R 机构进行动力学建模分析。

设驱动杆的输入角定义为广义坐标  $q = (\theta_1, \theta_2)^T$ , 所对应的广义虚位移为  $\delta q = (\delta\theta_1, \delta\theta_2)^T$ 。

由式(11~38), 可将各构件的虚位移和机构的广义虚位移联系起来, 则有:  $\delta X_1 = J_1 \delta q, \delta \alpha = J_2 \delta q$  (分别

为动平台基点移动虚位移、转动虚位移);  $\delta X = J_v \delta q, \delta \theta = J_\omega \delta q$  (分别为各杆件移动虚位移、转动虚位移)。

其中:  $J_v$  为杆件的移动与广义坐标间的映射关系;  $J_\omega$  为杆件的转动与广义坐标间的映射关系。

对自由度为  $f$ 、广义速度为  $q_f = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_f]^T$  的机械系统, 笔者按照拓扑结构分解路线, 将其分成若干个 SKC, 而 SKC 又可分解为若干个 SOC ( $\Delta_j^-$ )、SOC ( $\Delta_j^0$ )、SOC ( $\Delta_j^+$ ); 被解除约束处的运动副支反力, 转化为新系统上的力; 最后, 通过虚功原理, 建立动力学分析方程, 求解出相应的驱动力(矩)。

### 6.2 受力分析

杆件质心上的力有重力和惯性力, 而力矩仅存在惯性力矩。

对于动平台, 作用在质心上的力和力矩分别为:

$$\begin{aligned} F_{p1} &= f + m_{p1}g - m_{p1}X \\ M_{p1} &= \Gamma - {}^oI_{p1}\alpha - \alpha \times ({}^oI_{p1}\alpha) \end{aligned} \quad (39)$$

式中:  $f, \Gamma$ —在动平台质心的外力和外力矩;

${}^oI_{p1} = {}^oR({}^{p1}I_{p1}){}^oR^T$ —静坐标中动平台质心的惯量矩阵。

对于各支链, 假设重力是唯一的外力, 则作用在各构件上的力和力矩分别为:

$$\begin{aligned} F_{p1} &= m_{p1}g - m_{p1}a_{mid} \\ M_{p1} &= -{}^oI_{p1}\varepsilon - \bar{\omega} \times ({}^oI_{p1}\bar{\omega}) \end{aligned} \quad (40)$$

式中:  $OIP$ —在静坐标系  $\{o\}$  中各杆件质心处的惯量矩阵。

### 6.3 动力学方程的生成

(1) 对于 SKC<sub>2</sub>, 解除运动副  $H$  和  $J$  处的约束, 于是, 支反力  $F_H$  和  $F_J$  转化为未知外力, 由虚功原理有:

$$F_H^T \delta X_H + F_{p1}^T \delta X_{p1} + M_{p1}^T \delta \theta_{p1} + F_{ML}^T \delta X_{ML} + M_{ML}^T \delta \theta_{ML} + F_{KL}^T \delta X_{LK} + M_{KL}^T \delta \theta_{KL} + F_{JK}^T \delta X_{JK} + M_{JK}^T \delta \theta_{JK} + M_2^T \delta \theta_2 \quad (41)$$

(2) 对于 SKC<sub>1</sub>, 由虚功原理有:

$$F_{AB}^T \delta X_{AB} + M_{AB}^T \delta \theta_{AB} + F_{BC}^T \delta X_{BC} + M_{BC}^T \delta \theta_{BC} + F_{DE}^T \delta X_{DE} + M_{DE}^T \delta \theta_{DE} + F_{EF}^T \delta X_{EF} + M_{EF}^T \delta \theta_{EF} + M_1^T \delta \theta_1 - F_H^T \delta X_H + F_{CF}^T \delta X_{CF} \quad (42)$$

最终, 由式(41, 42) 可求得机构的驱动力矩  $M_1$ 、 $M_2$ , 以及运动副  $H$  处的支反力  $F_H$ 。

### 6.4 数值仿真算例

根据各构件的尺寸参数, 笔者选取各杆件质量分别为:  $m_{AB} = 6.739 \text{ g}, m_{DE} = 7.839 \text{ g}, m_{EF} = 7.839 \text{ g}, m_{CF} = 8.844 \text{ g}, m_{JK} = 7.752 \text{ g}, m_{KL} = 7.337 \text{ g}, m_{AB} = 6.739 \text{ g}, m_{LM} = 1.945 \text{ g}$ ; 动平台的质量为:  $42.734 \text{ g}$ 。

笔者仅考虑动平台上的垂直向下载荷,即  $f=0$ ,  $\tau=0$ ;采用与 5.3 节相同的运动规律,通过 MATLAB 编程计算,得到那驱动力矩  $M$  关于时间  $t$  的曲线,如图 8 所示。

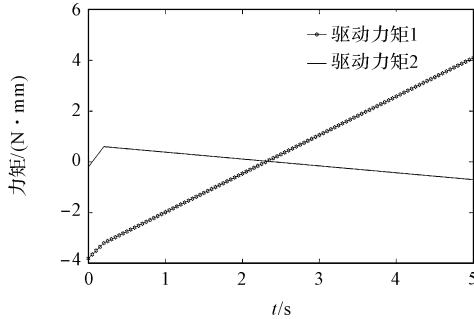


图 8 驱动力矩的理论值

运动副  $H$  处的支反力,如图 9 所示。

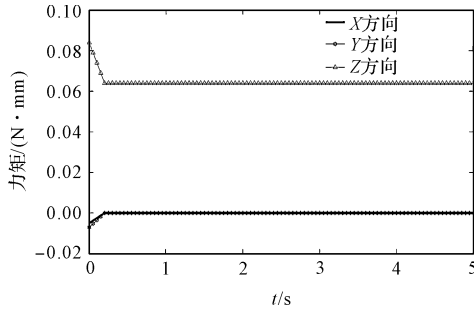


图 9  $H$  点处支反力  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  分量

从图(8,9)可知:

(1) 驱动力矩 1 上升平稳,驱动力矩 2 在  $0 \sim 0.2$  s 内先是平稳上升,在  $0.2$  s  $\sim 5$  s 内平稳下降;

(2)  $H$  点处,支反力  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  分量变化都比较平稳,即  $X$  和  $Y$  方向支反力在  $0 \sim 0.2$  s 内从负值上升到 0,在  $0.2$  s  $\sim 5$  s 内没有变化,而  $Z$  方向支反力在  $0 \sim 0.2$  s 内下降,在  $0.2$  s  $\sim 5$  s 没有变化。

笔者将虚拟 Solid works 模型导入到 Adams 中进行动力学仿真,添加机构运动副的约束和重力,仿真时间为 5 s,则得到驱动力矩仿真曲线和  $H$  点支反力仿真曲线分别与图(8,9)的一致,这表明动力学建模的正确性<sup>[25]</sup>。

### 6.5 与传统虚功原理建模方法的比较

由传统虚功原理可知<sup>[26]</sup>:

$$\begin{aligned} M^T \delta q + F_{P1} \delta X + M_{P1}^T \delta \alpha + F_{AB} \delta X_{AB} + M_{AB}^T \delta \theta_{AB} + F_{BC} \delta X_{BC} + \\ M_{BC}^T \delta \theta_{BC} + F_{JK} \delta X_{JK} + M_{JK}^T \delta \theta_{JK} + F_{KL} \delta X_{KL} + M_{KL}^T \delta \theta_{KL} + \\ F_{LM} \delta X_{LM} + M_{LM}^T \delta \theta_{LM} + F_{AB} \delta X_{AB} + M_{AB}^T \delta \theta_{AB} + F_{CF} \delta X_{CF} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

其中:各参数的意义与 6.1 节中一致,且  $M^T = [M_1, M_2]^T$ 。

进一步,化简式(43)可得:

$$\begin{aligned} (M^T + F_{P1}^T J_1 + M_{P1}^T J_2 + F_{AB}^T J_{ABV} + M_{AB}^T J_{AB\omega} + F_{BC}^T J_{BCV} + \\ M_{BC}^T J_{BC\omega} + F_{JK}^T J_{JKV} + M_{JK}^T J_{JK\omega} + F_{KL}^T J_{KLV} + M_{KL}^T J_{KL\omega} + \\ F_{LM}^T J_{LMV} + M_{LM}^T J_{LM\omega} + F_{DE}^T J_{DEV} + M_{DE}^T J_{DE\omega} + F_{EF}^T J_{EFV} + \\ M_{EF}^T J_{EF\omega} + F_{CF}^T J_{CFV} + M_{CF}^T J_{CF\omega}) \delta q = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

由于式(44)对任意的  $\delta q$  都成立,可得到机构的动力学逆解方程为:

$$\begin{aligned} M^T = - (F_{P1}^T J_1 + M_{P1}^T J_2 + F_{AB}^T J_{ABV} + M_{AB}^T J_{AB\omega} + F_{BC}^T J_{BCV} + \\ M_{BC}^T J_{BC\omega} + F_{JK}^T J_{JKV} + M_{JK}^T J_{JK\omega} + F_{KL}^T J_{KLV} + M_{KL}^T J_{KL\omega} + \\ F_{LM}^T J_{LMV} + M_{LM}^T J_{LM\omega} + F_{DE}^T J_{DEV} + M_{DE}^T J_{DE\omega} + F_{EF}^T J_{EFV} + \\ M_{EF}^T J_{EF\omega} + F_{CF}^T J_{CFV} + M_{CF}^T J_{CF\omega}) \end{aligned} \quad (45)$$

由式(45)得到的结果,与图 8 所示一致。

分析式(43~45)可以发现:传统的虚功原理建模方法采用的是整体建模思路,不区分建模的先后顺序,方程中没有体现求解有关支反力这一要素。

## 7 结束语

笔者提出了一种新型 1T1R 并联机构,先对其进行了拓扑分析,然后对其进行了运动学分析(包括:位置正反解求解、奇异位置分析、工作空间和杆件的速度与加速度分析),最后进行动力学性能分析,求得了该机构的驱动力矩和子运动链连接处的运动副支反力。

研究结果表明:

(1) 全铰一平移一转动并联机构具有制造简单、符号式位置正解,且运动解耦等优势;

(2) 根据基于拓扑特征的运动学建模方法,求解了机构的符号式位置正反解;

(3) 基于 Jacobian 法分析机构的奇异位形,可以避免机构在初始状态下处于奇异位置,导致机构运行卡死或损坏;

(4) 基于符号式位置正解与基于位置反解计算的工作空间分别耗时 848.6 s、1 225.2 s,计算效率提高了 30.7%。可见,基于符号式位置正解计算工作空间可大大减少计算量;

(5) 该机构动平台的线速度和角速度变化平缓;又其驱动力矩和运动副  $H$  处的支反力变化平稳,因此,机构具有良好的动态性能;

(6) 与传统虚功原理建模方法相比,基于虚功原理的序单开链法同时具有 Newton-Euler 法和 Lagrange 法的优点,即不仅能求解驱动力矩,而且能求出子运动链连接处运动副处的支反力。

由于该机构的设计分析尚未考虑运动副摩擦等因素对动力学模型的影响,在后续的研究中,笔者将分析该因素对实际机器工作精度的影响,以提高机器的动



力学性能;同时,将对该机构进行机械结构设计,以研发出相应的样机。

### 参考文献(References):

- [1] 陈海,曹毅,秦友蕾.无耦合完全各向同性 1T1R 并联机器人机构型综合[J].中国机械工程,2016,27(5):589-595.
- [2] 尹小琴,凌乐军,赵广红,等.新型一平移一转动并联机构的精度分析[J].机械设计与研究,2014,30(2):15-18.
- [3] LI Ju, YIN Hong-bo, SHEN, Hui-ping, et al. Type Synthesis Approach for 2-DOF 1T1R Parallel Mechanisms Based on POC[C].//Intelligent robotics and applications: 7th International Conference, ICIRA 2014, Guangzhou, China, Proceedings, p. II.:Springer,2014:89-99.
- [4] DALLALIBERA F, ISHIGURO H. Non-singular transitions between assembly modes of 2-DOF planar parallel manipulators with a passive leg[J]. **Mechanism and Machine Theory**,2014,77(2):182-197.
- [5] 吴巍.一种两自由度并联机构位置分析与仿真[J].机械设计与制造,2011(5):113-115.
- [6] 尤晶晶,李成刚,吴洪涛.并联式六维加速度传感器的哈密顿动力学研究[J].机械工程学报,2012,48(15):9-17.
- [7] 姚建涛,韩博,窦玉超,等.基座运动对并联调整机构动力学性能的影响[J].农业机械学报,2018,49(7):410-418.
- [8] THANH T D, KOTLARSKI J, HEIMANN B, et al. Dynamics identification of kinematically redundant parallel robots using the direct search method[J]. **Mechanism and Machine Theory**,2012,52(none):277-295.
- [9] LEBRET G, LIU K, LEWIS F. Dynamic analysis and control of a Stewart platform manipulator[J]. **Journal of Field Robotics**,1993,10(5):629-655.
- [10] 徐奕柳,杨龙,杨中原,等.新型 PURU + RR + S 球面并联人形机器人踝关节机构动力学性能分析[J].中国机械工程,2017,28(16):1971-1976.
- [11] SHIAU T N, TSAI Y J, TSAI M S. Nonlinear dynamic analysis of a parallel mechanism with consideration of joint effect[J]. **Mechanism and Machine Theory**,2008,43(4):491-505.
- [12] 李研彪,郑航,孙鹏,等.考虑关节摩擦的 5-PSS/UPS 并联机构动力学建模及耦合特性分析[J].机械工程学报,2019,55(3):43-52.
- [13] KALANI H, REZAEI A, AKBARZADEH A. Improved general solution for the dynamic modeling of Gough-Stewart platform based on principle of virtual work[J]. **Nonlinear Dynamics**,2016,83(4):2393-2418.
- [14] 陈子明,刘晓蒙,张扬,等.对称两转动一平移 3-UPU 并联机构的动力学分析[J].机械工程学报,2017,53(21):46-53.
- [15] 王向阳,郭盛,曲海波,等.并联机构驱动力优化配置方法配置方法及应用研究[J].机械工程学报,2019,55(1):44-53.
- [16] WANG Jie-gao, GOSSELIN C M. A new approach for the dynamic analysis of parallel manipulators[J]. **Multibody System Dynamics**,1998,2(3):317-334.
- [17] LI Meng, HUANG Tian, MEI Jiang-ping, et al. Dynamic formulation and performance comparison of the 3-DOF modules of two reconfigurable PKM--the Tricept and the TriVariant[J]. **Journal of Mechanical Design**,2005,127(6):1129-1136.
- [18] KALANI H, REZAEI A, AKBARZADEH A. Improved general solution for the dynamic modeling of Gough-Stewart platform based on principle of virtual work[J]. **Nonlinear Dynamics**,2016,83(4):2393-2418.
- [19] 刘晓飞,唐艳华,刘鑫,等.含约束支链的冗余驱动并联机构动力学性能优化[J].农业机械学报,2021,52(5):378-385.
- [20] 黄凯伟,沈惠平,李菊,等.一种具有符号式位置正解的部分运动解耦空间 2T1R 并联机构拓扑设计与动力学建模[J].中国机械工程,2022,33(2):160-169.
- [21] 沈惠平,王达,孟庆梅.含特征链的两支链大转角零耦合度一平移一转动平台:中国,202110165397. X[P]. 2021-08-31.
- [22] 杨廷力,沈惠平,刘安心,等.机器人机构拓扑结构设计[M].北京:科学出版社,2012.
- [23] 沈惠平,机器人机构拓扑特征运动学[M].北京:高等教育出版社,2021.
- [24] 沈惠平,王达,李菊,等.1T2R 并联机构拓扑降耦设计与运动性能分析[J].农业机械学报,2021,52(5):370-377.
- [25] 常江,孙鹏达.空气净化器缓冲包装跌落仿真分析及优化[J].包装与食品机械,2021,39(5):68-73.
- [26] 杨廷力.机械系统基本理论—结构学、运动学、动力学[M].北京:机械工业出版社,1996.

[编辑:全瑶]

### 本文引用格式:

华耀,沈惠平,李菊,等.1T1R 并联机构拓扑设计及其运动学、动力学分析[J].机电工程,2022,39(10):1424-1432.

HUA Yao, SHEN Hui-ping, LI Ju. Topological design, kinematic and dynamics performance analysis of 1T1R parallel mechanism[J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2022,39(10):1424-1432.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>