

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2021.07.008

基于 Lagrange 方程和二阶影响系数矩阵的 Delta 并联机构约束力分析及仿真研究^{*}

张 勇¹, 郭志飞^{1*}, 甄希金², 张敬芳¹

(1. 河北机电职业技术学院 机械工程系, 河北 邢台 054001; 2. 上海船舶工艺研究所, 上海 200032)

摘要: 针对并联机构约束力分析过程复杂、计算量较大的问题, 以三平移 Delta 并联机构为例, 对其约束力进行了仿真分析和实验研究。首先, 建立了 Delta 并联机构的 Lagrange 动力学模型, 采用二阶影响系数矩阵建立了驱动滑块的加速度数学模型, 并进行了求解验证; 然后, 对并联机构中的驱动滑块进行了受力分析, 得到了球铰处的约束力方程, 并使用 MATLAB 求解了该方程, 在 ADAMS 中验证了该方程的正确性; 最后, 使用 Delta 并联机构和陀螺仪进行了试验, 得到了驱动滑块的加速度和竖直方向约束力数据。研究表明: 使用 Lagrange 方程和二阶影响系数矩阵对 Delta 机构进行约束力分析, 不仅能得到正确的约束力分析结果, 还可以简化分析过程, 得到较为规范、简洁的球铰约束力方程, 并大幅度降低理论推导过程的复杂度; 该结果可以推广至其他并联机构的约束力分析, 为并联机构约束力分析提供新的方法。

关键词: 并联机构; 动力学分析; 约束力; Lagrange 方程; 影响系数矩阵

中图分类号: TH112

文献标识码: A

文章编号: 1001-4551(2021)07-0857-08

Constraint force analysis and simulation of the Delta parallel mechanism based on Lagrange equation and second-order influence coefficient matrix

ZHANG Yong¹, GUO Zhi-fei¹, ZHEN Xi-jin², ZHANG Jing-fang¹

(1. Department of Mechanical Engineering, Hebei Institute of Mechatronic Technology, Xingtai 054001, China;

2. Shipbuilding Technology Research Institute, Shanghai 200032, China)

Abstract: Aiming at the problem of complex process and large amount of calculation for the constraint force of parallel mechanism, the Delta parallel mechanism was taken as an example to make theoretical derivation, simulation analysis and experimental verification of its constraining force formula. First, Lagrange dynamics model of Delta parallel mechanism was established. The second-order influence coefficient matrix was used to establish the acceleration mathematical model of the driving slider. Then the force analysis of the driving slider was carried out to obtain the constraint force equation. The constraint force equation was solved with MATLAB and its correctness was verified with ADAMS. The binding time curve of the ball hinge of the driving slider was obtained. Finally, the acceleration and vertical constraint data of the driving slider were obtained with Delta parallel mechanism and gyroscope. The experiment results show that the analysis of constraint force and simulation of the Delta parallel mechanism based on Lagrange equation and second-order influence coefficient matrix can not only get the correct constraint analysis result, simplify the analysis process, obtain a relatively standard and concise constraint equation of ball hinge, but also greatly reduce the complexity of derivation. Moreover, it can be extended to other parallel mechanism and provide a new method for binding analysis of parallel mechanism.

Key words: parallel mechanism; dynamics analysis; constraint force; Lagrange equation; influence coefficient matrix

收稿日期: 2020-10-14

基金项目: 河北省高等学校科学技术研究重点资助项目(ZD2020322); 河北机电职业技术学院轧辊清洗包装智能装备创新中心资助项目(202001)

作者简介: 张勇(1982-), 男, 河北邢台人, 硕士, 副教授, 主要从事并联机构设计、机器人运动控制方面的研究。E-mail: owen7180@163.com

通信联系人: 郭志飞, 男, 硕士, 讲师。E-mail: 793239085@qq.com

0 引 言

并联机构具有刚度好、运动精度高、易在线控制等优点,在许多工业领域的应用广泛^[1]。对其进行动力学分析对于并联机构的结构设计、动力学性能优化和实时控制都具有重要的意义^{[2]6-7}。

对并联机构的动力学分析需要系统的方法^{[2]119},并联机构的力学分析也是并联机构研究的基本问题^[3-5]。目前,国内外在并联机构动力学分析方面取得了较大的成果,常用的并联机构动力学分析方法有 Lagrange 方法、Newton-Euler 法和 Kane 方法^[6-7]。YANG D C H^[8]利用 Newton-Euler 法研究了 Stewart 平台的逆动力学问题;但该研究忽略了关节的摩擦和杆的力矩惯量,并且其假设杆的中心位于杆的轴线上。JI Zhi-ming^[9]在 1994 年建立了 Stewart 平台的动力学方程,并且该方程考虑了腿部转动惯量对 Stewart 平台的影响。CODOUREY A^[10]介绍了基于拉格朗日方程和虚功原理的并联机构动力学建模方法,其中 Lagrange 方法是以能量为基础建立的动力学的数学模型,该方法能够得到形式简洁的动力学方程,十分适用于并联机构的动力学分析^[11];但是,该方法的不足之处是其无法进行约束力分析,Kane 方法亦然。在多数情况下,Newton-Euler 法被用于对并联机构的约束力进行分析研究,但其过程复杂、方程数量庞大、易出错^[12,13]。

综上,本文开展基于逆动力学的并联机构约束力的分析研究,通过建立三平移 Delta 并联机构的 Lagrange 动力学模型,使用二阶影响系数矩阵求解滑块的加速度,对三平移 Delta 并联机构驱动滑块的约束力进行分析和求解,为三平移 Delta 并联机构结构设计及控制系统设计提供理论依据。

1 Lagrange 动力学模型建立

本文所研究的三平移动 Delta 并联机构如图 1 所示。

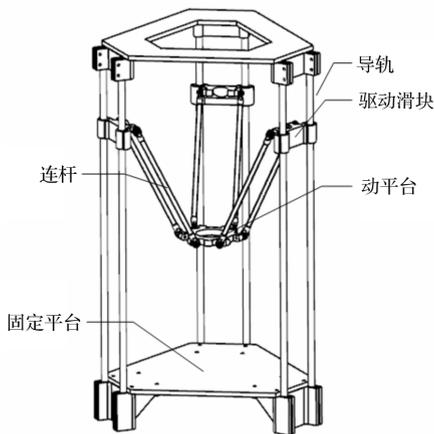


图 1 三平移 Delta 并联机构

图 1 中,该并联机构的主要组成部分有:固定平台、导轨、滑块、连杆、动平台等。当 3 个滑块以不同规律运动的时候,动平台就可以实现沿 X、Y、Z 方向的平动,以及各种耦合形式的运动。

为了便于后续分析,笔者将该并联机构进行简化,机构位置结构简图如图 2 所示。

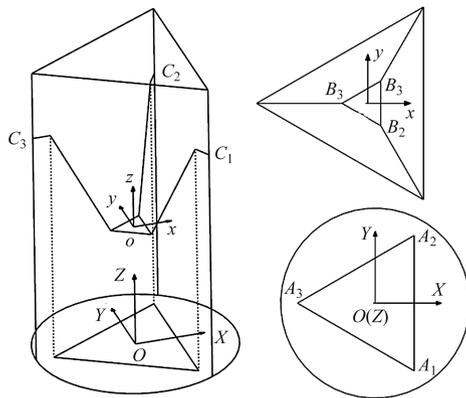


图 2 机构位置结构简图

图 2 中,固定平台简化为等边三角形 $A_1A_2A_3$,其外接圆半径为 R ;动平台简化为等边三角形 $B_1B_2B_3$,其外接圆半径为 r ;在动平台上建立动坐标系,动坐标系原点位于动平台 $B_1B_2B_3$ 的中心, x 轴垂直于 B_1B_2 , y 轴平行于 B_1B_2 , z 轴由右手坐标系得到;在固定平台上建立静坐标,原点 O 位于三角形 $A_1A_2A_3$ 的角平分线的交点,坐标轴的建立和动平台相同。

该并联机构的主要结构参数如表 1 所示。

表 1 并联机构结构参数

杆长 L/mm	机床参数 R/mm	机床参数 r/mm	导轨长 a/mm
185	120	33	500

本文研究的并联机构的材料为 45#钢,动平台的质量 $m_a = 0.336 \text{ kg}$,滑块的质量为 $m_1 = 0.167 \text{ kg}$,连杆的质量为 $m_2 = 0.028 \text{ kg}$ 。

通过对该机构分析,得到该机构的 Lagrange 动力学模型^[14-16],表示广义坐标 x, y, z 方向上广义力:

$$\begin{cases}
 F_x = m_o \dot{v}_x + \frac{3}{2} m_2 \dot{v}_x + m_1 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dv_{di}}{dt} J_{i1} + v_{di} \frac{dJ_{i1}}{dt} \right) + \\
 \frac{m_2}{2} \sum_{i=1}^3 \left[\left(\dot{v}_z + \frac{dv_{di}}{dt} \right) J_{i1} + (v_z + v_{di}) \frac{dJ_{i1}}{dt} \right] - \\
 \left[m_1 \sum_{i=1}^3 v_{di} \left(\frac{\partial J_{i1}}{\partial x} v_x + \frac{\partial J_{i2}}{\partial x} v_y + \frac{\partial J_{i3}}{\partial x} v_z \right) \right] - \\
 \left[\frac{m_2}{2} \sum_{i=1}^3 (v_z + v_{di}) \left(\frac{\partial J_{i1}}{\partial x} v_x + \frac{\partial J_{i2}}{\partial x} v_y + \frac{\partial J_{i3}}{\partial x} v_z \right) \right] + \\
 (m_1 + m_2) g \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z_i}{\partial x}
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 F_y = m_o \dot{v}_y + \frac{3}{2} m_2 \dot{v}_y + m_1 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dv_{di}}{dt} J_{i2} + v_{di} \frac{dJ_{i2}}{dt} \right) + \\
 \frac{m_2}{2} \sum_{i=1}^3 \left[\left(\dot{v}_z + \frac{dv_{di}}{dt} \right) J_{i2} + (v_z + v_{di}) \frac{dJ_{i2}}{dt} \right] - \\
 \left[m_1 \sum_{i=1}^3 v_{di} \left(\frac{\partial J_{i1}}{\partial y} v_x + \frac{\partial J_{i2}}{\partial y} v_y + \frac{\partial J_{i3}}{\partial y} v_z \right) \right] - \\
 \left[\frac{m_2}{2} \sum_{i=1}^3 (v_z + v_{di}) \left(\frac{\partial J_{i1}}{\partial y} v_x + \frac{\partial J_{i2}}{\partial y} v_y + \frac{\partial J_{i3}}{\partial y} v_z \right) \right] + \\
 (m_1 + m_2) g \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z_i}{\partial y} \\
 F_z = m_o \dot{v}_z + m_1 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dv_{di}}{dt} J_{i3} + v_{di} \frac{dJ_{i3}}{dt} \right) + \\
 \frac{m_2}{2} \sum_{i=1}^3 \left[\left(\dot{v}_z + \frac{dv_{di}}{dt} \right) (1 + J_{i3}) + (v_z + v_{di}) \frac{dJ_{i3}}{dt} \right] - \\
 \left[m_1 \sum_{i=1}^3 v_{di} \left(\frac{\partial v_{di}}{\partial z} \right) + \frac{m_2}{2} \sum_{i=1}^3 (v_z + v_{di}) \left(\frac{\partial v_{di}}{\partial z} \right) \right] + \\
 (m_1 + m_2) g \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z_i}{\partial z} + m_0 g + 3m_2 g
 \end{cases} \quad (1)$$

记为:

$$\mathbf{F} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T \quad (2)$$

通过力的雅各比矩阵得出在驱动滑块所需的驱动力表达式为:

$$\mathbf{F}_{di} = [F_{di} \quad F_{d2} \quad F_{d3}]^T \quad (3)$$

鉴于文章篇幅,此处不再详细列出其推导过程。

2 三平移 Delta 并联机构加速度分析

2.1 三平移 Delta 机构的二阶影响系数矩阵

根据三平移 Delta 并联机构的性质可知,当确定 3 个驱动滑块的输入位移 d_1, d_2, d_3 , 动平台的位姿可以由其质心坐标 x, y, z 唯一确定。

动平台的位姿可以表示为 $U = \{x, y, z\}^T$, 对应的 3 个驱动滑块的位置为 $d = \{d_1, d_2, d_3\}^T$, 如图 3 所示。

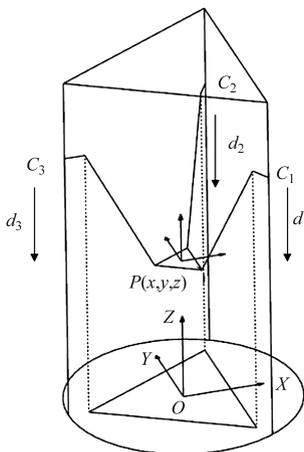


图3 三平移 Delta 并联机构简化图

根据图 3 可列出位移方程组:

$$\begin{cases}
 x = f_1(d_1, d_2, d_3) \\
 y = f_2(d_1, d_2, d_3) \\
 z = f_3(d_1, d_2, d_3)
 \end{cases} \quad (4)$$

输入位移 d_1, d_2, d_3 和输出广义坐标 x, y, z 均随时间变化,将式(4)对时间进行隐函数求导,可以得到:

$$\begin{cases}
 \dot{x} = \frac{\partial f_1}{\partial z_1} d_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_2} d_2 + \frac{\partial f_1}{\partial z_3} d_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} d_i \\
 \dot{y} = \frac{\partial f_2}{\partial z_1} d_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_2} d_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z_3} d_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} d_i \\
 \dot{z} = \frac{\partial f_3}{\partial z_1} d_1 + \frac{\partial f_3}{\partial z_2} d_2 + \frac{\partial f_3}{\partial z_3} d_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_3}{\partial z_i} d_i
 \end{cases} \quad (5)$$

整理后可以得到其矩阵形式,即:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial d_1} & \frac{\partial f_1}{\partial d_2} & \frac{\partial f_1}{\partial d_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial d_1} & \frac{\partial f_2}{\partial d_2} & \frac{\partial f_2}{\partial d_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial d_1} & \frac{\partial f_3}{\partial d_2} & \frac{\partial f_3}{\partial d_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{U}} = [\mathbf{G}] \dot{\mathbf{d}} \quad (7)$$

式中:矩阵 $[\mathbf{G}]$ —该三平移 Delta 并联机构的一阶影响系数矩阵(Jacobian 矩阵)^{[17]182-185}。

式(7)再次对时间求导,经简化整理后可得:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial z_i \partial z_j} d_i d_j + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial U}{\partial z_k} d_k \quad (8)$$

式中: U —动平台广义坐标方向的加速度, $\mathbf{U} = \{\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}\}^T$; \mathbf{d} —3 个滑块竖直方向的加速度, $\mathbf{d} = \{\ddot{z}_1, \ddot{z}_2, \ddot{z}_3\}^T$ 。

式(8)可以写成矩阵形式:

$$\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{d}^T [\mathbf{H}] \mathbf{d} + [\mathbf{G}] \ddot{\mathbf{d}} \quad (9)$$

式中: $[\mathbf{H}]$ —该并联机构的二阶段影响矩阵(Hessian 矩阵)^{[17]186-190}。

从式(8,9)可得到二阶段影响矩阵的表达式为:

$$[\mathbf{H}] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial z_i \partial z_j} \quad (10)$$

将二阶段影响矩阵展开,有:

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial d_1 \partial d_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial d_1 \partial d_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial d_1 \partial d_3} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial d_2 \partial d_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial d_2 \partial d_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial d_2 \partial d_3} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial d_3 \partial d_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial d_3 \partial d_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial d_3 \partial d_3} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{3 \times 3 \times 3} \quad (11)$$

由式(11)可以看出,二阶影响系数矩阵 $[\mathbf{H}]$ 是一个三维立体矩阵,即二阶影响系数矩阵中的每个元素均为一个 3×1 的列向量。每个元素表达式为^{[17]189-190}:

$$\mathbf{H}_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial d_i \partial d_j} = \left\{ \frac{\partial^2 f_1}{\partial d_i \partial d_j}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial d_i \partial d_j}, \frac{\partial^2 f_3}{\partial d_i \partial d_j} \right\}^T \quad (12)$$

2.2 三平移 Delta 并联机构加速度分析和计算

设执行机构的加速度表示为: $\mathbf{a}_0 = \{a_x, a_y, a_z\}^T$, 3 个滑块的加速度为: $\mathbf{a}_d = \{a_1, a_2, a_3\}^T$, 根据式(9)可以求出驱动滑块加速度, 即:

$$\mathbf{a}_d = \mathbf{v}_0^T [\mathbf{H}_d] \mathbf{v}_0 + [\mathbf{J}] \mathbf{a}_0 \quad (d=1, 2, 3) \quad (13)$$

式中: \mathbf{v}_0 —动平台的速度, $\mathbf{v}_0 = \{v_x, v_y, v_z\}^T$; $[\mathbf{J}]$ —一阶影响系数矩阵, 式(7)中矩阵 $[\mathbf{G}]$ 的逆矩阵; $[\mathbf{H}_d]$ $\{d=1, 2, 3\}$ —二阶影响系数矩阵。

$[\mathbf{H}_d]$ 展开后的表达式为:

$$[\mathbf{H}_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial z} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[\mathbf{H}_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial z} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[\mathbf{H}_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial z \partial z} \end{bmatrix} \quad (16)$$

在该并联机构的动平台添加空间圆锥螺旋线的运动轨迹, 其曲线方程为:

$$\begin{cases} x_m = 15t \cos(\pi t) \\ y_m = 15t \sin(\pi t) \\ z_m = 5t \end{cases} \quad (17)$$

在该运动轨迹下, 使用 MATLAB 求解三平移 Delta 机构 3 个驱动滑块的加速度, 得到的加速度时间曲线如图 4 所示。

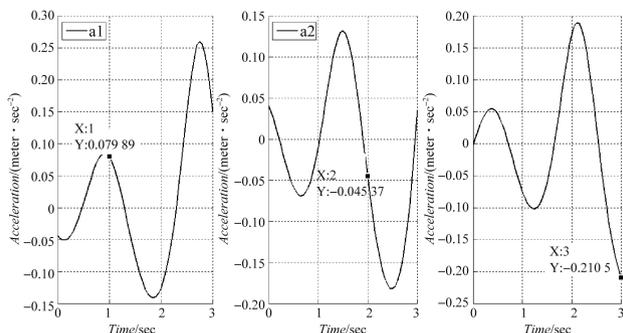


图 4 三平移 Delta 机构加速度时间曲线(MATLAB)

图 4 中, 从左向右依次为驱动滑块 1、滑块 2 和滑块 3 的加速度时间曲线。

2.3 三平移 Delta 并联机构加速度仿真分析

在 ADAMS 中建立该并联机构的虚拟样机, 如图 5 所示。

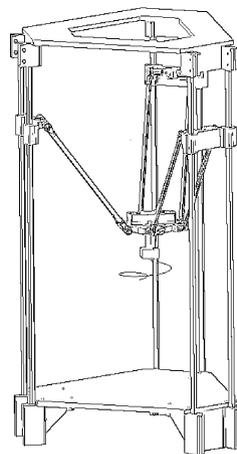


图 5 三平移 Delta 机构加速度时间曲线

在并联机构虚拟样机的动平台上添加运动驱动, 运动驱动轨迹方程如式(17)所示。图 5 为 Delta 并联机构的运动仿真, 显示出动平台的运动轨迹为空间圆锥螺旋线^[18-19]。

仿真完成后, 可得 3 个驱动滑块的加速度时间曲线, 如图 6 所示。

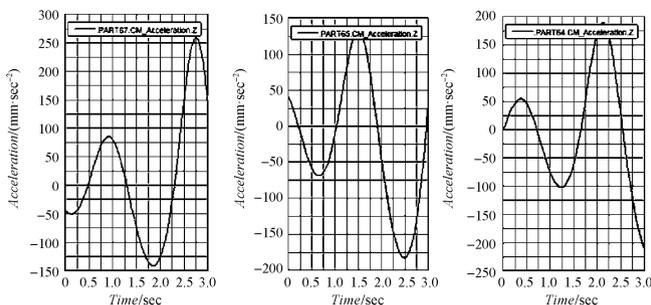


图 6 三平移 Delta 机构加速度时间曲线(ADAMS)

图 6 中, 从左至右依次为滑块 1、滑块 2、滑块 3 的加速度时间曲线。

在图 4 中, $t=1$ s 时, 滑块一的加速度 $a_1 = 0.0799 \text{ m/s}^2$; $t=2$ s 时, 滑块二加速度 $a_2 = -0.045 \text{ m/s}^2$; $t=3$ s 时, 滑块三的加速度为 $a_3 = 0.21 \text{ m/s}^2$ 。

而在图 6 中, 即 ADAMS 的仿真结果中, $t=1$ s, 滑块一的加速度 $a_1 = 0.0799 \text{ m/s}^2$; $t=2$ s 时, 滑块二的加速度 $a_2 = 0.045 \text{ m/s}^2$; $t=3$ s 时, 滑块三的加速度 $a_3 = 0.21 \text{ m/s}^2$ 。可以看出, ADAMS 仿真得到加速度的值与在 MATLAB 数值计算的结果吻合, 验证了该加速度逆解数学模型的正确性, 也证明了 ADAMS 仿真

的正确性。

3 驱动滑块约束力分析

3.1 三平移 Delta 并联机构的约束力分析基础

为方便三平移 Delta 并联机构约束力的分析,需要做一些准备工作,具体如下:

(1)以驱动滑块 1 为例,设动平台中心坐标在静坐标系中表示为 $O_m(x_m, y_m, z_m)$,与驱动滑块 1 相连的连杆 B_1C_1 两端的坐标点分别用 B_1 和 C_1 表示:

$$B_1 \left(\frac{r}{2} + x_m, \frac{-\sqrt{3}r}{2} + y_m, z_m \right) \quad (18)$$

$$C_1 \left(\frac{R}{2}, \frac{-\sqrt{3}R}{2}, d_1 \right) \quad (19)$$

可以得到连杆 B_1C_1 的向量为:

$$\vec{B_1C_1} = \left(\frac{R}{2} - \frac{r}{2} - x_m, \frac{-\sqrt{3}R}{2} + \frac{\sqrt{3}r}{2} - y_m, d_1 - z_m \right) \quad (20)$$

根据并联机构的运动学反解,在已知动平台位姿时,3 个驱动滑块的 Z 方向位移可以表示为 d_1 、 d_2 和 d_3 :

$$\begin{cases} d_1 = z_m + \sqrt{l^2 - \left(\frac{1}{2}(R-r) - x_m \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(R-r) + y_m \right)^2} \\ d_2 = z_m + \sqrt{l^2 - \left(\frac{1}{2}(R-r) - x_m \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(R-r) - y_m \right)^2} \\ d_3 = z_m + \sqrt{l^2 - (R-r+x_m)^2 - y_m^2} \end{cases} \quad (21)$$

篇幅所限,这里不再给出其具体求解过程。

(2)该 Delta 并联机构的 3 个分支均为 4S 闭环,并且为平行四边形,如图 7 所示。

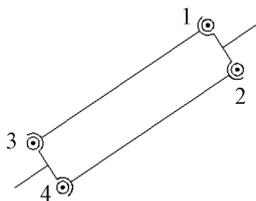


图 7 Delta 机构 4S 平行四边形闭环

球铰 1、2 处连接驱动滑块,球铰 3、4 处连接动平台,根据螺旋理论可以知道,球铰 1、2 处的约束力方向均是沿着分杆 13 和分杆 24 的轴向^[20],本文将该并联机构进行简化。

在图 7 中,笔者将 4S 平行四边形机构简化成一个连杆,即球铰 1 和 2 合并,3 和 4 合并。

驱动滑块受力分析图 8 所示。

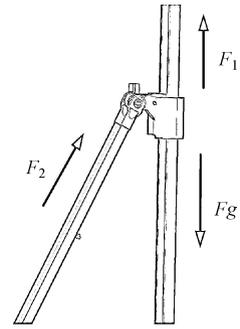


图 8 驱动滑块受力分析图

(3)连杆 B_1C_1 约束力分析如图 9 所示。

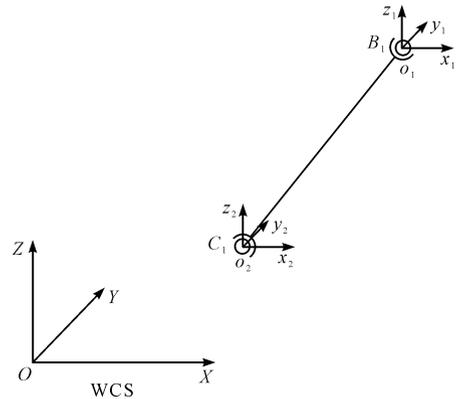


图 9 连杆 B_1C_1 约束力分析

图 9 中,在连杆 B_1C_1 中,作用在滑块 1 中球铰的约束力方向沿向量连杆 B_1C_1 轴线方向。为了方便求解连杆两端球铰水平方向约束力,笔者在连杆 B_1C_1 两端球铰球心处添加两个局部坐标系 $O_1 - x_1y_1z_1$ 和 $O_2 - x_2y_2z_2$,两个局部坐标系的 X、Y、Z 轴均和世界坐标系的 X、Y、Z 轴方向一致。

3.2 约束力竖直方向分力求解及仿真

根据前面的分析,可以得到驱动滑块竖直方向受力情况,如图 10 所示。

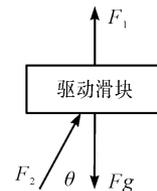


图 10 驱动滑块受力分析图

该并联机构的材质为铁,滑块 1 上的驱动力为 F_1 ,加速度为 a_{d1} ,球铰处对驱动滑块在竖直方向的约束力分力用 F_{21} 表示。根据图 10,在忽略摩擦力的前提下,滑块 1 竖直方向的受力为:

$$F_1 + F_g + F_{21} = ma \quad (22)$$

笔者在 MATLAB 对式(22)进行求解,得到球铰竖直方向的分力如图 11 所示。

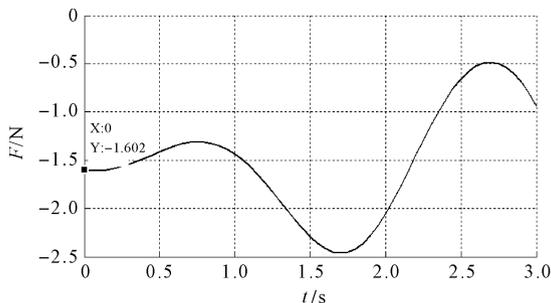


图 11 MATLAB 中驱动滑块 1 处球铰约束竖直方向分力

笔者在 ADAMS 中对该并联机构进行动力学仿真,给 3 个驱动滑块添加驱动,动平台运动轨迹如式(17)。

对驱动滑块处球铰约束力竖直分力进行求解,得到球铰的约束力竖直方向受力如图 12 所示。

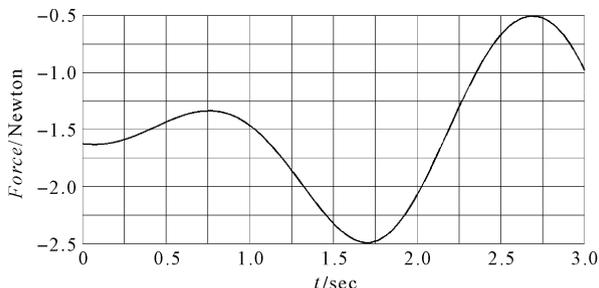


图 12 ADAMS 中驱动滑块 1 处约束力的竖直方向分力

从图 11、图 12 可以看出:两者的结果吻合,验证了 Lagrange 方程和二阶影响系数矩阵对球铰连接处竖直方向约束力分析结果的正确性。

3.3 约束力水平方向分力分析

对约束力水平方向分力的分析将会涉及到连杆,需要建立连杆的质心连体坐标系 $o_l - x_l y_l z_l$ 和质心平动坐标系 $o_p - x_p y_p z_p$,对连杆的转动惯量进行坐标间变换,这里研究对象为连杆 $B_1 C_1$ 。

质心平动坐标系的坐标原点定义在连杆质心,坐标轴平行于该并联机构的静坐标系各坐标轴。各轴单位向量分别为 $\vec{x}_p(1,0,0)$, $\vec{y}_p(0,1,0)$, $\vec{z}_p(0,0,1)$,如图 13 所示。

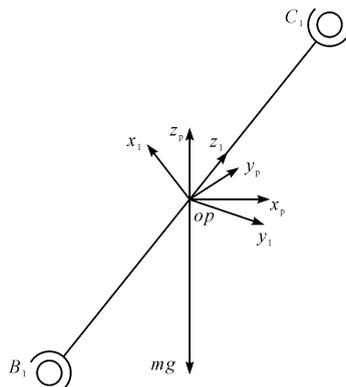


图 13 连杆的连体坐标系和质心平动坐标系

质心连体坐标系的原点仍定义在连杆 $B_1 C_1$ 质心处,质心连体坐标系的 Z 轴正向单位向量定义如式(23)所示,根据该并联机构的结构尺寸,得到其表达式为式(24),为了便于表达, Z 轴正向单位向量在静坐标系各轴分量用 z_{l1}, z_{l2}, z_{l3} 表示,即:

$$\vec{z}_l = \frac{\vec{B}_1 C_1}{|B_1 C_1|} \quad (23)$$

$$\vec{z}_l = (z_{l1}, z_{l2}, z_{l3}) =$$

$$\frac{1}{l} * \left(\frac{R}{2} - \frac{r}{2} - x_m, -\sqrt{3} \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{3}r}{2} - y_m, d_1 - z_m \right) \quad (24)$$

坐标系 $o_l - x_l y_l z_l$ 的其他坐标轴的正向单位向量定义表达式为:

$$\vec{x}_l = (x_{l1}, x_{l2}, x_{l3}) = \frac{\vec{x}_p \times \vec{z}_l}{|\vec{x}_p \times \vec{z}_l|} = \frac{1}{\sqrt{z_2^2 + z_3^2}} (0, -z_3, z_2) \quad (25)$$

$$\vec{y}_l = \vec{z}_l \times \vec{x}_l = (y_{l1}, y_{l2}, y_{l3}) = \left(\sqrt{z_2^2 + z_3^2}, \frac{-z_1 z_2}{\sqrt{z_2^2 + z_3^2}}, \frac{-z_1 z_3}{\sqrt{z_2^2 + z_3^2}} \right) \quad (26)$$

根据式(24 ~ 26),可以确定出质心连体坐标系 $o_l - x_l y_l z_l$ 相对于质心平动坐标系的方向余弦矩阵为:

$$C^{pl} = \begin{bmatrix} x_{l1} & x_{l2} & x_{l3} \\ y_{l1} & y_{l2} & y_{l3} \\ z_{l1} & z_{l2} & z_{l3} \end{bmatrix} \quad (27)$$

根据刚体的惯量张量在连心坐标系间的变换公式^[21],已知连杆 $B_1 C_1$ 在质心连体坐标系下的惯性张量 I^l 和连体坐标系相对于质心平动坐标系的方向余弦矩阵 C^{pl} ,可以求出连杆 $B_1 C_1$ 在质心平动坐标系的惯性张量 I^p 。连体坐标系 $O_l - x_l y_l z_l$ 为连杆的惯性主轴坐标系,可知连杆在质心平动坐标系中的转动惯性张量 I^p ,即:

$$I^p = [C^{pl}] * I^l * [C^{pl}]^T \quad (28)$$

经分解后得到的连杆所受约束力如图 14 所示。

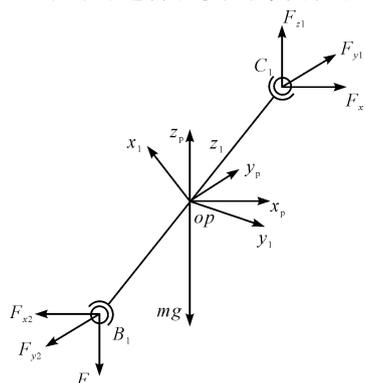


图 14 连杆的所受约束力分解

根据上述分析以及刚体一般运动微分方程(8),可以写出连杆沿质心平动坐标系的 x_p 轴方向的受力平衡方程和绕 y_p 轴的力矩平衡方程,即:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{x1}^p + \mathbf{F}_{x2}^p = 2m_l \mathbf{a}_x^p \\ (\mathbf{F}_{x2}^p - \mathbf{F}_{x1}^p)z_{l3} * \frac{1}{2} + (\mathbf{F}_{z2}^p - \mathbf{F}_{z1}^p)z_{l1} * \frac{1}{2} = \\ 2(I_{yy}^p \dot{\omega}_y^p + (I_{xx}^p - I_{zz}^p) \dot{\omega}_x^p \dot{\omega}_z^p) \end{cases} \quad (29)$$

式中: \mathbf{F}_{x1}^p —球铰 C_1 的约束力在质心平动坐标系中沿 $o_p x_p$ 轴的水平分力; \mathbf{F}_{x2}^p —球铰 B_1 的约束力在质心平动坐标系中沿 $o_p x_p$ 轴的水平分力; \mathbf{F}_{z1}^p —球铰 C_1 的约束力在质心平动坐标系中沿 $o_p z_p$ 轴的竖直分力; \mathbf{F}_{z2}^p —球铰 B_1 的约束力在质心平动坐标系中沿 $o_p z_p$ 轴的竖直分力; m_l —连杆质量; \mathbf{a}_x^p —连杆 $B_1 C_1$ 在质心平动坐标系中沿 $o_p x_p$ 方向的直线加速度; $\dot{\omega}_y^p$ —连杆 $B_1 C_1$ 在质心平动坐标系中绕 $o_p y_p$ 的角加速度; $\dot{\omega}_x^p$ —连杆 $B_1 C_1$ 在质心平动坐标系中绕 $o_p x_p$ 的角速度; $\dot{\omega}_z^p$ —连杆 $B_1 C_1$ 在质心平动坐标系中绕 $o_p z_p$ 的角速度; I_{xx}^p —连杆 $B_1 C_1$ 在质心平动坐标系中绕 $o_p x_p$ 轴的转动惯量; I_{yy}^p —连杆 $B_1 C_1$ 在质心平动坐标系中绕 $o_p y_p$ 轴的转动惯量; I_{zz}^p —连杆 $B_1 C_1$ 在质心平动坐标系中绕 $o_p z_p$ 轴的转动惯量。

由于连杆 $B_1 C_1$ 为二力杆,故球铰 B_1 和 C_1 的约束分量存在以下关系, \mathbf{F}_{z1}^p 为已知量,即:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{x1}^p = -\mathbf{F}_{x2}^p \\ \mathbf{F}_{y1}^p = -\mathbf{F}_{y2}^p \\ \mathbf{F}_{z1}^p = -\mathbf{F}_{z2}^p \end{cases} \quad (30)$$

通过 MATLAB 对式(29)进行解算,并在 ADAMS 中获取对应球铰的水平方向 X 轴约束力。

MATLAB 中球铰 C_1 的 X 方向分力如图 15 所示。

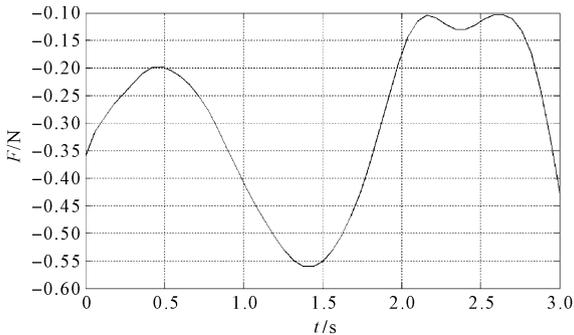


图 15 MATLAB 中计算得出球铰 C_1 的 X 方向分力

ADAMS 中球铰 C_1 的 X 方向分力如图 16 所示。

在该并联机构的 ADAMS 仿真模型中,一个分支有 4 个球铰,而文中的数学计算模型对分支球铰进行了合并,故 ADAMS 仿真对一个分支中同一端的两个球铰在 X 方向的约束分力进行求和。

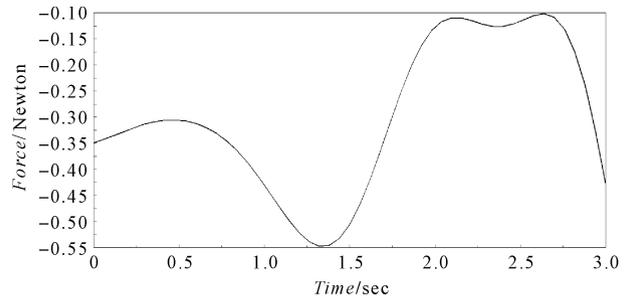


图 16 ADAMS 中计算得出球铰 C_1 的 X 方向分力

由图(15,16)可看出:在 MATLAB 和 ADAMS 中,计算得到的球铰约束力的 X 方向分力比较接近,存在的细微偏差是由于合理假设导致的,该结果验证了本文对约束力分析的正确性。

球铰约束力的 Y, X 方向分量分析过程类似,此处不再重复。

4 实验验证

为了验证本文的结论,笔者使用现有的三平移 Delta 并联机构运动平台进行实验,如图 17 所示。

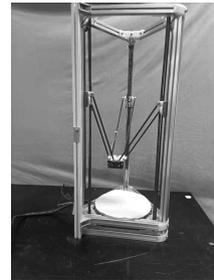


图 17 三平移 Delta 并联机构

图 17 中,该并联机构的控制单元采用 Arduino 板,对执行机构进行轨迹规划,使其运动轨迹如图 5 中的螺旋线。

笔者使用 MPU-6050 加速度计采集驱动滑块 1 的竖直方向的加速度数据,并使用均值滤波得到较平滑的数据;在 MATLAB 中打开该加速度文件,并绘制折线图,如图 18 所示。

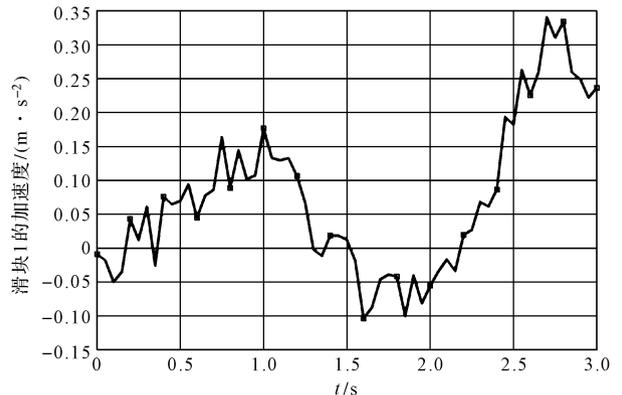


图 18 MPU-6050 加速度计采集的滑块 1 的加速度数据

笔者根据式(22)和滑块 1 的竖直方向加速度数据得到其竖直方向的合外力,如图 19 所示。

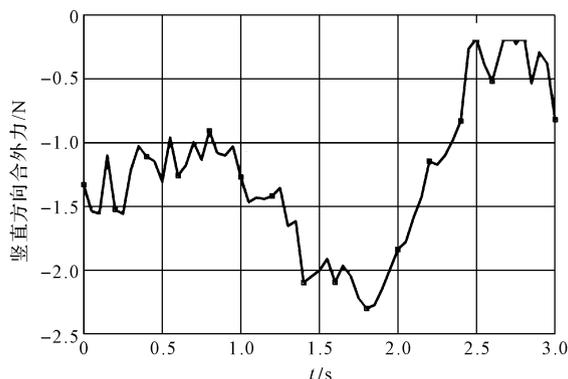


图 19 实验所得的滑块 1 所受合外力

从图 19 中可以看到,驱动滑块 1 的合外力和图 11 中通过公式计算所得的合外力数据趋势吻合;其最大值、最小值也比较接近。该结果验证了本文结论的正确性。

5 结束语

本研究使用 Lagrange 方程和二阶影响系数矩阵,建立了三平移 Delta 并联机构驱动滑块球铰处的约束力方程,运用 MATLAB 对约束力方程进行了求解,并用 ADAMS 方程对约束力方程进行了验证;最后,通过实验数据对仿真结果进行了验证。

研究结果表明:

(1)使用 Lagrange 方程和二阶影响系数矩阵建立的约束力方程,其表达式规范、简洁,方程数量减少约 1/2;

(2)将二阶影响系数矩阵和 Lagrange 方程结合,分析并联机构的约束力,简化了约束力的推导过程,得到的约束力分析结果准确,有一定程度的方法创新。

下一阶段,笔者将会把本研究成果推广应用到其他构型的并联机构,以提升该约束力算法的通用性、稳定性和运算速度;并且,笔者还将致力于开发具有自主知识产权的并联机构专用三维动力学分析软件系统。

参考文献 (References):

[1] 张 曙, HEISEL U. 并联运动机床[M]. 北京:机械工业出版社,2003.
[2] 黄 真,孔令富,方跃法. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京:机械工业出版社,1997.

[3] GALLARDO J, RICO J M, FRISOLI A, et al. Dynamics of parallel manipulators by means of screw theory[J]. *Mechanism and Machine Theory*,2003,38(11):1113-1131.
[4] NOKLEBY S B, FISHER R, PODHORODESKI R P, et al. Force capabilities of redundantly-actuated parallel manipulators[J]. *Mechanism and Machine Theory*,2005,40(5):578-599.
[5] SOKOLOV A, XIROUCHAKIS P. Dynamics analysis of a 3-DOF parallel manipulator with R-P-S joint structure [J]. *Mechanism and Machine Theory*,2007,42(5):541-557.
[6] 李 磊. 六自由度并联平台位置正解及控制方法研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学自动化学院,2008.
[7] 何立波. 六自由度摇摆台动力学仿真及优化[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学机电工程学院,2006.
[8] DO W Q D, YANG D C H. Inverse dynamic analysis and simulation of a platform type of robot[J]. *Journal of Robotic Systems*,1988.5(3):209-227.
[9] JI Zhi-ming. Dynamics decomposition for stewart platforms [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1994, 116(1):67-69.
[10] CODOUREY A. Dynamic modeling of parallel robots for computed-torque control implementation[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 1998, 17(12):1325-1336.
[11] 邱志成,谈大龙. 并联机器人研究现状[J]. 机械制造,2000,38(4):27-29.
[12] 赵 燕,黄 真. 并联机构的主动力和约束力分析[J]. 燕山大学学报,2008,32(4):99-303.
[13] 叶 勇. 基于虚功原理的并联机构驱动力和约束力分析[J]. 机械设计与研究,2012,28(3):17-20.
[14] 吴惟敏. 虚功原理中的广义坐标选择[J]. 大学物理,1991,12(6):46-46
[15] 王爱勤,冯振宇. 也谈虚位移原理中广义坐标的选择[J]. 大学物理,2003,22(8):13-14.
[16] 史浩明. 6-PUS 并联机构动力学分析及优化设计[D]. 重庆:重庆大学机械工程学院,2012.
[17] 黄 真,赵永生,赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
[18] 张永德,汪洋涛,王沫楠,等. 基于 ANSYS 与 ADAMS 的柔性体联合仿真[J]. 系统仿真学报,2008,20(17):4501-4504.
[19] 张 雷,余克龙,陈少钟,等. 基于 ANSYS 和 ADAMS 空间四连杆引纬机构的柔性动力学仿真[J]. 纺织学报,2013,34(5):116-120.
[20] 黄 真,刘婧芳,李艳文,等. 论机构自由度[M]. 北京:科学出版社,2011.
[21] 张劲夫,秦卫阳. 高等动力学[M]. 北京:科学出版社,2011.

[编辑:雷 敏]

本文引用格式:

张 勇,郭志飞,甄希金,等. 基于 Lagrange 方程和二阶影响系数矩阵的 Delta 并联机构约束力分析及仿真研究[J]. 机电工程,2021,38(7):857-864.
ZHANG Yong, GUO Zhi-fei, ZHEN Xi-jin, et al. Constraint force analysis and simulation of the Delta parallel mechanism based on Lagrange equation and second-order influence coefficient matrix[J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2021,38(7):857-864. 《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>