

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2021.07.002

# 3-PRS 并联机构的动力学惯量耦合特性分析\*

倪仕全<sup>1,2</sup>, 田大鹏<sup>1,2\*</sup>

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033; 2. 中国科学院大学, 北京 100049)

**摘要:**针对 3-PRS 并联机构动力学惯量耦合特性的问题,在关节空间中建立了机构的动力学模型,对机构主动支链之间存在的惯量耦合进行了研究。首先,给出了机构的运动学模型,针对动平台广义位姿、速度、加速度存在耦合的问题,分别通过约束方程、一阶影响系数矩阵、二阶影响系数矩阵,对其进行了解耦,并建立了各支链与动平台末端速度、加速度的映射关系,对机构运动学进行了仿真验证;其次,采用虚功原理建立了机构的动力学模型,并进行了仿真验证;然后,建立了机构在关节空间的动力学模型;最后,在机构的工作空间内,研究了惯量耦合特性评价指标随机构运动的分布规律。研究表明:在机构的工作空间内,在一定程度上,通过合理规划机构的运动范围,可以减小并联机构主动支链间的动力学惯量耦合强度。

**关键词:** 3-PRS 并联机构;解耦;动力学模型;惯量耦合特性

中图分类号:TH112;TP391.9

文献标识码:A

文章编号:1001-4551(2021)07-0815-07

## Dynamic inertia coupling characteristics analysis of 3-PRS parallel mechanism

NI Shi-quan<sup>1,2</sup>, TIAN Da-peng<sup>1,2</sup>

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Science, Changchun 130033, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** Aiming at the problem of inertia coupling characteristics of 3-PRS parallel mechanism, the dynamic model of 3-PRS parallel mechanism was established in joint space, and the inertia coupling between active branches was studied. Firstly, the kinematics model of mechanism was given. Aiming at the coupling problem of generalized pose, velocity and acceleration of moving platform, it was decoupled by constraint equation, first-order influence coefficient matrix and second-order influence coefficient matrix respectively. The relationship was established of velocity and acceleration between branches and moving platform. The kinematics model was verified by simulation. The dynamics model of mechanism was established by virtual principle and verified by simulation. Then, in the joint space, the dynamics model of mechanism was established. Finally, the change of the evaluation index of inertia coupling characteristics with the motion of the mechanism was studied in the workspace of the mechanism. The results show that the inertia coupling strength of dynamics between the branches can be reduced, and the influence on the dynamic performance of the mechanism can be reduced by properly planning the kinematic space of the mechanism.

**Key words:** 3-PRS parallel mechanism; decoupling; dynamics model; inertia coupling characteristics

## 0 引言

并联机构具有高刚度、高精度、良好的动态性能、易于实现高速度等优点,在天线支撑、轮毂打磨、医疗

器械等方面得到了广泛应用<sup>[1-5]</sup>。并联机构是一个多人多出非线性系统,目前,对其研究主要集中于运动学、动力学等方面。然而机构的驱动支链存在动力学惯量耦合现象,这种现象在机构高速、高加速运动中更

收稿日期:2020-09-21

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51705496);中国科学院青年创新促进会资助项目(2017257)

作者简介:倪仕全(1994-),男,山东枣庄人,博士研究生,主要从事并联机构的运动学、动力学方面的研究。E-mail:754935389@qq.com

通信联系人:田大鹏,男,博士,研究员。E-mail:d.tian@ciomp.ac.cn

加明显,严重影响了并联机构的动态性能<sup>[6]44[7]604</sup>。研究并联机构的惯量耦合特性对提升机构的动态性能具有重要意义。

由于并联机构耦合方面的研究主要集中于运动耦合、刚柔耦合等,对于刚度大、高速运动的并联机构,惯量耦合引起的动力学耦合现象更严重<sup>[8-10]</sup>。文献[11]对 Stewart 并联机构提出了惯量耦合特性的分析方法。文献[12,13]分析了 Stewart 并联机构惯量矩阵具有对角占优及机构关节间具有惯量耦合的特性。文献[14]研究了 Stewart 并联机构在关节空间中负载与电机惯量配比关系。文献[15]提出了 3-PRS 并联机构惯量耦合特性的分析方法,但没有针对动平台位姿耦合的关系进行解耦。文献[16]提出了 Stewart 并联机构的耦合惯量特性评价指标,并给出了指标在工作空间的分布规律。文献[17]针对 Cross IV 并联机构,提出了支链间耦合作用的等效惯量参数计算方法。

上述研究中缺乏统一描述惯量耦合特性的标度。文献[7]605 研究了 2(3HUS + S) 并联机构在关节空间中的惯量耦合特性,并提出了降低主动支链间动力学耦合强度的措施;文献[6]50 针对 5 PSS/UPU 并联机构提出了惯量耦合特性指标,并给出了指标在机构工作空间中的分布规律。

笔者在已有研究的基础上,在充分考虑并联机构惯量矩阵为对角优势阵、惯量耦合特性统一标度的情况下,定义惯量耦合特性;首先,对 3-PRS 并联机构进行运动学分析,针对动平台广义位姿、速度、加速度存在耦合的问题,进行解耦;采用虚功原理建立机构的动力学模型,基于此,建立机构在关节空间的动力学模型,最后对机构进行惯量耦合特性分析。

## 1 3-PRS 并联机构运动学分析

### 1.1 3-PRS 并联机构描述

3-PRS 并联机构结构简图如图 1 所示。

该机构由静平台、动平台及 3 条相同支链构成。每条支链按移动副—转动副—球面副的顺序依次连接静平台与动平台,移动副处滑块的导轨垂直固定于静平台。3 条支链限制了机构的运动特征,使动平台具有 3 个自由度:两个转动、一个移动。

机构尺寸参数:静平台外接圆半径为  $R$ ,动平台外接圆半径为  $r$ ,从动件长度为  $l$ 。

### 1.2 机构逆运动学建模

图 1 中,笔者在静平台上建立静坐标系  $O - XYZ$ ,原点位于平台几何中心; $Y$  轴沿  $OA_1$  方向并与其共线,

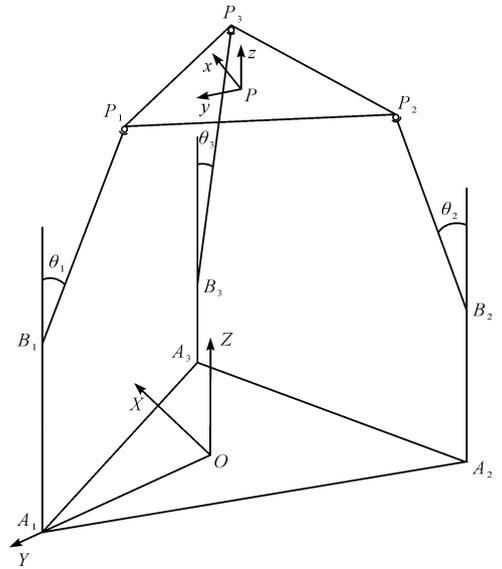


图 1 3-PRS 并联机构

$B_i (i=1,2,3)$ —包括沿导轨运动的移动副、连接滑块与从动件的转动副; $P_i$ —球面副; $\theta_i$ —导轨与从动件的夹角

$Y$  轴与  $OA_i$  之间夹角为  $\alpha_i$ ;  $Z$  轴垂直于静平台方向向上,根据右手定则确定  $X$  轴; $OA_i$  垂直于对应的转动副轴线。

动坐标系  $P - xyz$  的建立过程与坐标系  $O - XYZ$  相同,其中:

$$\alpha_i = \frac{2\pi(i-1)}{3} \quad (1)$$

动平台绕  $O - XYZ$  的  $X$  轴、 $Y$  轴、 $Z$  轴分别转动角度为  $\alpha, \beta, \gamma$ ,则动平台相对静平台的旋转矩阵为:

$$T = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & c\gamma s\beta s\alpha - c\alpha s\gamma & s\alpha s\gamma + c\alpha c\gamma s\beta \\ c\beta s\gamma & c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma - c\gamma s\alpha \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: $s\alpha_i$ — $\sin\alpha_i$ ;  $c\alpha_i$ — $\cos\alpha_i$ 。

由文献[18]可得机构伴随运动为:

$$\begin{cases} x = -rc\beta s\gamma \\ y = r/2(s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma - c\beta c\gamma) \\ \gamma = \arctan(s\alpha s\beta / (c\alpha + c\beta)) \end{cases} \quad (3)$$

联立式(1~3),并根据杆长  $l$  不变的条件,可得机构的运动学逆解为:

$$h_i = p_{iz} - \sqrt{l^2 - (p_{ix} + R s\alpha_i)^2 - (p_{iy} - R c\alpha_i)^2} \quad (4)$$

式中: $P_{ix}$ —点  $P_i$  在静坐标系  $X$  轴坐标; $P_{iy}$ —点  $P_i$  在静坐标系  $Y$  轴坐标; $P_{iz}$ —点  $P_i$  在静坐标系  $Z$  轴坐标。

### 1.3 移动副速度、加速度映射分析

动平台各球面副中心点  $P_i$  的速度为:

$$v_{pi} = v + w \times p_i = J_{pi} V \quad (5)$$

式中: $V$ —动平台速度,  $V = [v^T w^T]^T$ ;  $J_{pi}$ —球副速度与

动平台速度的雅可比矩阵,  $\mathbf{J}_{pi} = [\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad -\bar{\mathbf{p}}_i]; \bar{\mathbf{p}}_i - p_i$  的斜对称矩阵,其他类推。

动平台各球面副中心点  $P_i$  的速度还可以表示为:

$$v_{pi} = v_{bi}e + w_{li} \times l_i \quad (6)$$

式中:  $v_{bi}$ —移动副速度;  $w_{li}$ —从动件角速度。

由式(5,6)可得移动副速度:

$$v_{bi} = \mathbf{J}_{bi}V \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{J}_{bi}$ —移动副速度与动平台速度的雅可比矩阵,

$$\mathbf{J}_{bi} = \begin{bmatrix} l_i^T & (p_i \times l_i)^T \\ l_i^T e & l_i^T e \end{bmatrix}。$$

式(7)可改写成矩阵形式为:

$$v_b = \mathbf{J}_bV \quad (8)$$

由于动平台位姿存在耦合,需对其进行解耦,建立  $V$  与  $\dot{q}_0 = [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{z}]^T$  的关系。将式(3)中的  $x, y, z$  对  $\alpha, \beta, z$  求偏导,可得:

$$v = \mathbf{J}_{u1}\dot{q}_0 \quad (9)$$

式中:  $\mathbf{J}_{u1}$ — $v$  与  $\dot{q}_0$  之间的雅可比矩阵,  $\mathbf{J}_{u1} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{d\alpha} & \frac{dx}{d\beta} & 0 \\ \frac{dy}{d\alpha} & \frac{dy}{d\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

$\alpha, \beta, \gamma$  对  $\alpha, \beta, z$  求偏导,即:

$$w = \mathbf{J}_{u2}\dot{q}_0 \quad (10)$$

式中:  $\mathbf{J}_{u2}$ — $w$  与  $\dot{q}_0$  之间的雅可比矩阵,  $\mathbf{J}_{u2} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{d\gamma}{d\alpha} & \frac{d\gamma}{d\beta} & 0 \end{bmatrix}。$$

联立式(9,10)可得:

$$V = \mathbf{J}_u\dot{q}_0 \quad (11)$$

式中:  $\mathbf{J}_u$ — $V$  与  $\dot{q}_0$  之间的雅可比矩阵,  $\mathbf{J}_u = [\mathbf{J}_{u1}^T \quad \mathbf{J}_{u2}^T]^T$ 。

由式(8,11)可得机构的解耦速度雅可比矩阵为:

$$v_b = \mathbf{J}\dot{q}_0 = \mathbf{J}_b\mathbf{J}_u\dot{q}_0 \quad (12)$$

为建立动平台加速度与移动副加速度之间的关系<sup>[19]</sup>,对式(5,6)求导,并两边左点乘  $l_i^T$ ,即:

$$\begin{aligned} l_i^T a + l_i^T \varepsilon \times p_i + l_i^T w \times (w \times p_i) = \\ l_i^T a_{bi}e + l_i^T \varepsilon_{li} \times l_i + l_i^T w_{li} \times (w_{li} \times l_i) \end{aligned} \quad (13)$$

式中:  $\varepsilon_{li}$ —从动件角加速度。

式(13)可改写成:

$$a_{bi} = \mathbf{J}_{bi}A + V^T \mathbf{J}_iV \quad (14)$$

其中:  $\mathbf{J}_i = \frac{1}{l_i^T e} (\mathbf{J}_{wi}^T \bar{l}_i^T \mathbf{J}_{wi} - \mathbf{K})$ ;  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \bar{l}_i \bar{p}_i \end{bmatrix}。$

对式(9)求导,可建立动平台加速度  $a$  与  $\ddot{q}_0$  之间的关系,即:

$$a = \mathbf{J}_{u1}\ddot{q}_0 + \dot{q}_0^T \mathbf{H}_{u1}\dot{q}_0 \quad (15)$$

式中:  $\mathbf{H}_{u1}^{ij}$ —矩阵  $\mathbf{H}_{u1}$  中第  $i$  行第  $j$  列元素。

其中:  $\mathbf{H}_{u1} = [\mathbf{H}_{u11} \quad \mathbf{H}_{u12} \quad \mathbf{H}_{u13}]^T$ ;  $\mathbf{H}_{u1i} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{dJ_{u1}^{i1}}{d\alpha} & \frac{dJ_{u1}^{i2}}{d\alpha} & \frac{dJ_{u1}^{i3}}{d\alpha} \\ \frac{dJ_{u1}^{i1}}{d\beta} & \frac{dJ_{u1}^{i2}}{d\beta} & \frac{dJ_{u1}^{i3}}{d\beta} \\ \frac{dJ_{u1}^{i1}}{dz} & \frac{dJ_{u1}^{i2}}{dz} & \frac{dJ_{u1}^{i3}}{dz} \end{bmatrix}。$$

对式(10)求导,可建立动平台加速度  $\varepsilon$  与  $\ddot{q}_0$  之间的关系,即:

$$\varepsilon = \mathbf{J}_{u2}\ddot{q}_0 + \dot{q}_0^T \mathbf{H}_{u2}\dot{q}_0 \quad (16)$$

式中:  $\mathbf{H}_{u2}^{ij}$ — $\mathbf{H}_{u2}$  中第  $i$  行第  $j$  列元素。

其中:  $\mathbf{H}_{u2} = [\mathbf{H}_{u21} \quad \mathbf{H}_{u22} \quad \mathbf{H}_{u23}]^T$ ;  $\mathbf{H}_{u2i} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{dJ_{u2}^{i1}}{d\alpha} & \frac{dJ_{u2}^{i2}}{d\alpha} & \frac{dJ_{u2}^{i3}}{d\alpha} \\ \frac{dJ_{u2}^{i1}}{d\beta} & \frac{dJ_{u2}^{i2}}{d\beta} & \frac{dJ_{u2}^{i3}}{d\beta} \\ \frac{dJ_{u2}^{i1}}{dz} & \frac{dJ_{u2}^{i2}}{dz} & \frac{dJ_{u2}^{i3}}{dz} \end{bmatrix}。$$

由式(15,16)可得:

$$A = \mathbf{J}_u\ddot{q}_0 + \dot{q}_0^T \mathbf{H}_u\dot{q}_0 \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{H}_u$ —二阶影响系数矩阵,  $\mathbf{H}_u = [\mathbf{H}_{u1}^T \quad \mathbf{H}_{u2}^T]^T$ 。

式(14)可表示为:

$$a_{bi} = \mathbf{J}_{bi}\mathbf{J}_u\ddot{q}_0 + \mathbf{J}_{bi}\dot{q}_0^T \mathbf{H}_u\dot{q}_0 + (\mathbf{J}_u\dot{q}_0)^T \mathbf{J}_i\mathbf{J}_u\dot{q}_0 \quad (18)$$

## 1.4 从动件速度、加速度分析

### 1.4.1 从动件速度分析

为了建立从动件角速度与  $\dot{q}_0$  之间的关系,将式(6)两边左叉乘  $l_i$  得:

$$w_{li} = \frac{l_i \times (v_{pi} - v_{bi}e)}{l_i^2} = \mathbf{J}_{wi}\mathbf{J}_u\dot{q}_0 \quad (19)$$

式中:  $\mathbf{J}_{wi}$ —从动件线速度与动平台速度的雅可比矩阵,  $\mathbf{J}_{wi} = \frac{\bar{l}_i \mathbf{J}_{pi} - \bar{l}_i e \mathbf{J}_{bi}}{l_i^2}。$

从动件质心处速度为:

$$v_{li} = w_{li} \times \frac{l_i}{2} + ev_{bi} = \mathbf{J}_{li}\mathbf{J}_u\dot{q}_0 \quad (20)$$

式中:  $\mathbf{J}_{li}$ —从动件质心处速度与动平台速度的雅可比矩阵,  $\mathbf{J}_{li} = \frac{\mathbf{J}_{pi} + e\mathbf{J}_{bi}}{2}。$

1.4.2 从动件加速度分析

将式(5,6)求导,并左叉乘  $l_i$ ,可得  $\varepsilon_{li}$  与  $\dot{q}_0$  之间的关系为:

$$\varepsilon_{li} = J_{wi} J_u \ddot{q}_0 + (J_{wi} \dot{q}_0^T H_u + J_{eli} J_u) \dot{q}_0 \quad (21)$$

其中:  $J_{eli} = \frac{\bar{l}_i J_{api} - \bar{l}_i e (J_u \dot{q}_0)^T J_i}{l^2}$ ;  $J_{api} = - [0_{3 \times 3} \quad \overline{J_{u2} \dot{q}_0 p_i}]$ .

对式(20)求导,可得:

$$a_{li} = J_{li} J_u \ddot{q}_0 + (J_{li} \dot{q}_0^T H_u + J_{ali} J_u) \dot{q}_0 \quad (22)$$

1.5 运动学仿真

验证机构运动学分析的正确性,需将仿真结果与

理论计算值进行对比<sup>[20]</sup>。

机构尺寸参数如下:  $R = 0.055 \text{ m}$ ;  $r = 0.03536 \text{ m}$ ;  $l = 0.040 \text{ m}$ 。

令动平台的中点轨迹如下式:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi t}{90} \\ \beta = 0 \\ z = 0.084846 + 0.005t^3 \end{cases}, t \in [0, 3] \quad (23)$$

由式(4,7,18)可得到机构 3 个滑块理论位移、速度、加速度,如图 2 所示。

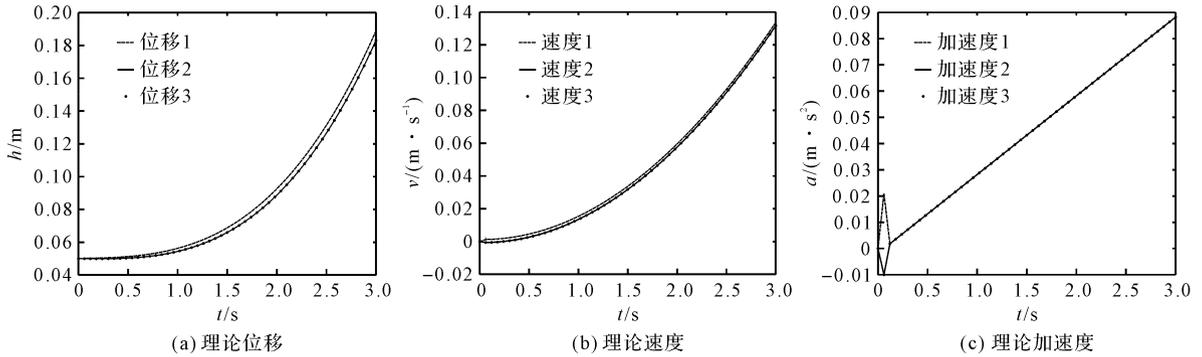


图 2 滑块理论位移、速度、加速度

笔者在运动学仿真软件 Simulink/SimMechanics 工具箱中,建立机构的三维模型,得到机构 3 个滑块的

位移、速度、加速度,如图 3 所示。

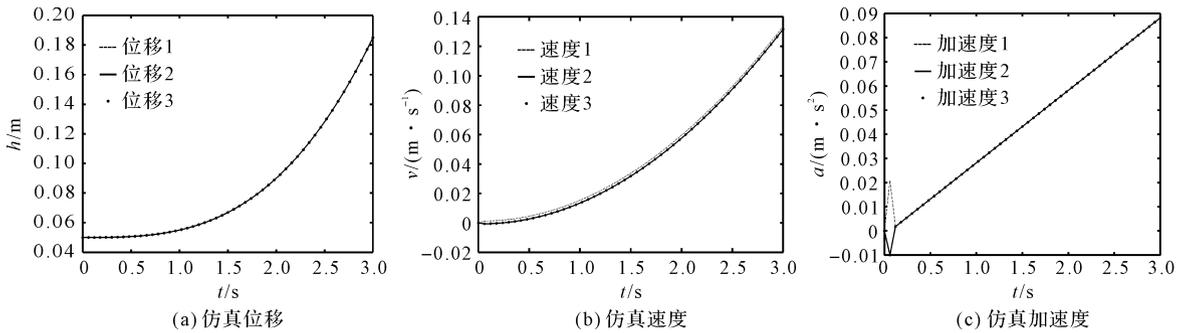


图 3 滑块的仿真位移、速度、加速度

在图 3(c)中,初始时刻,滑块的加速度出现跳变,这是由于动平台在式(23)的初始位姿与机构初始位姿不同造成的。从图 2 和图 3 可看出:该结果验证了机构运动学建模、动平台位姿(速度、加速度)解耦的正确性。

2 3-PRS 并联机构动力学分析

2.1 受力分析

在不考虑运动副存在摩擦力的情况下,笔者对各个构件的受力进行分析,建立机构的动力学模型。

滑块受力为:

$$F_{hi} = \begin{bmatrix} e\tau_i + m_b g - m_b e a_{bi} \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (24)$$

式中:  $\tau_i$ —驱动力;  $m_b$ —滑块质量;  $g$ —重力加速度向量。

从动件受力为:

$$F_{li} = \begin{bmatrix} m_l g - m_l a_{li} \\ -I_{li} \varepsilon_{li} - w_{li} \times (I_{li} w_{li}) \end{bmatrix} \quad (25)$$

式中:  $m_l$ —从动件质量;  $I_{li}$ —从动件在静坐标系的惯量矩阵。

动平台受力为:

$$F_p = \begin{bmatrix} f_e + m_p g - m_p a \\ n_e - I_p \varepsilon - (J_{u2} \dot{q}_0) \times (I_p (J_{u2} \dot{q}_0)) \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中:  $f_e$ —外力;  $n_e$ —外力矩;  $m_p$ —动平台质量;  $I_p$ —动平台在静坐标系的惯量矩阵。

### 2.2 3-PRS 并联机构整体动力学建模

对于 3-PRS 并联机构而言,主动力为各杆件的惯性力(矩)、重力、驱动力、外力(矩)。根据虚功原理,机构主动力做的虚功之和为零,即:

$$W_h + W_l + W_p + W_f = 0 \quad (27)$$

式中:  $W_h$ —滑块主动力所做虚功;  $W_l$ —从动件主动力所做虚功;  $W_p$ —动平台主动力所做虚功;  $W_f$ —外力(矩)所做虚功。

由式(24~27)可得机构的动力学方程:

$$M \ddot{q}_0 + C \dot{q}_0 + G = J^T \tau \quad (28)$$

式中:  $M$ —惯量矩阵项;  $C$ —向心力及科氏力项;  $G$ —重力项。

### 2.3 动力学数值算例

#### 2.3.1 并联机构的参数定义

机构的静平台、动平台及从动件的尺寸参数值同 1.5 部分,并联结构的其他参数值如表 1 所示。

表 1 结构参数

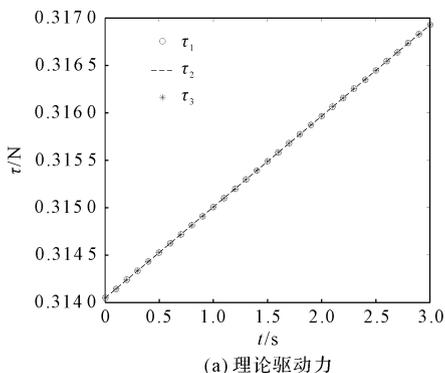
参数	数值
$m_p/\text{kg}$	0.085 002 49
$m_l/\text{kg}$	0.002 705 00
$m_b/\text{kg}$	0.000 973 80
$I_p/\text{kg} \cdot \text{m}^2$	diag(0.000 028 38, 0.000 028 38, 0.000 053 14)
$I_{li}/\text{kg} \cdot \text{m}^2$	diag(0.000 001 145, 0.000 001 145, 0.000 000 01)

#### 2.3.2 算例计算

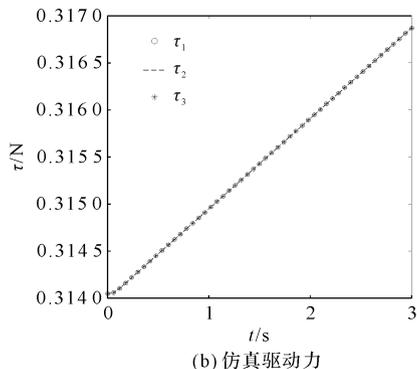
在不考虑动平台受到外力(矩)扰动的情况下,此处令动平台的位姿变化轨迹为:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ z = 0.084 846 + 0.005t^3 \end{cases}, t \in [0, 3] \quad (29)$$

3 个支链的理论驱动力及仿真驱动力如图 4 所示。



(a) 理论驱动力



(b) 仿真驱动力

图 4 支链的理论驱动力及仿真驱动力

从图 4 可知:理论驱动力、仿真驱动力曲线完全吻合,验证了动力学建模的正确性。

## 3 3-PRS 并联机构惯量耦合特性分析

### 3.1 关节空间动力学模型的建立

根据机构在广义坐标和关节空间坐标下动能相等的原理,可得:

$$\frac{1}{2} \dot{q}_0^T M \dot{q}_0 = \frac{1}{2} v_b^T M_g v_b \quad (30)$$

式中:  $M_g$ —关节空间下的惯量矩阵。

当机构在运动过程无奇异情况时:

$$M_g = (J^{-1})^T M J^{-1} \quad (31)$$

对式(12)求导可得:

$$\ddot{q}_0 = J^{-1} a_b - J^{-1} H v_b \quad (32)$$

其中:  $H = J_b (J \dot{q}_0)^T (J^{-1})^T \dot{q}_0^T H_u J^{-1} +$

$$\begin{bmatrix} (J_u \dot{q}_0)^T J_1 J_u \\ (J_u \dot{q}_0)^T J_2 J_u \\ (J_u \dot{q}_0)^T J_3 J_u \end{bmatrix} J^{-1}。$$

则并联机构在关节空间坐标的动力学方程为:

$$M_g a_b + C_g v_b + G_g = \tau \quad (33)$$

式中:  $C_g$ —关节空间下的向心力及科氏力项,  $C_g = (J^{-1})^T (-M J^{-1} H + C J^{-1})$ ;  $G_g$ —关节空间下的重力项,  $G_g = (J^{-1})^T G$ 。

### 3.2 惯量耦合特性评价指标

由式(33)可知,各通道的力和运动矢量存在着复杂的耦合关系,即一个输入影响多个输出,同时一个输出受多个输入的影响。

则本研究将评价指标值定义在(0,1)之间,这便于直接反应机构惯量耦合强度;指标值越大,耦合越大,反之越小。

此处定义惯量耦合特性  $ICI_i$  为:

$$\begin{cases} ICI_i = 1 - \frac{1}{e^{\delta_i}} \\ \delta_i = \frac{\sum_{j=1, i \neq j}^3 |M_g(i, j)|}{|M_g(i, i)|} \end{cases} \quad (34)$$

且需满足下式的条件:

$$M_i = |M_g(i, i)| - \sum_{j=1, i \neq j}^3 |M_g(i, j)| > 0 \quad (35)$$

同时,需求雅可比矩阵行列式值来判断机构是否存在奇异位姿。

### 3.3 仿真实验及结果分析

根据惯量耦合特性评价指标,笔者对 3-PRS 并联机构耦合特性进行数值仿真分析。根据机构的各条件约束及其可工作空间,选取机构位姿运动范围为: $\alpha \in [-10^\circ, 10^\circ]$ 、 $\beta \in [-10^\circ, 10^\circ]$ 、 $z \in [-24 \text{ mm}, 24 \text{ mm}]$ 。

当  $\alpha = 0, \beta = 0$  时,动平台沿 Z 轴在运动范围移动时,  $0.025 < M_i < 0.033$ ,  $|J| = 0.00324$ , 满足式(31, 35)的条件,惯量耦合特性随 z 方向的分布规律如图 5 所示。

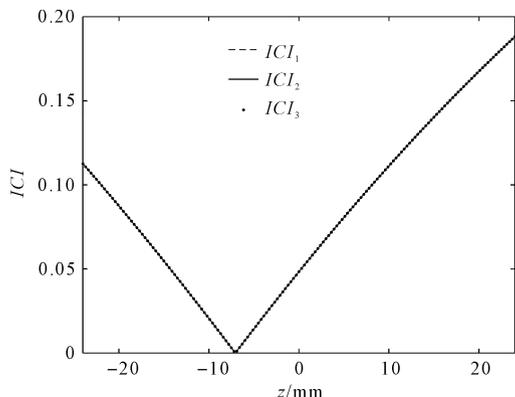


图 5 惯量耦合特性随 z 方向分布规律

图 5 中:3 个支链的惯量耦合特性强度随 z 变化一致,且变化范围较大;随着 z 值的增大,惯量耦合强度先减小后增大;在  $-7.2 \text{ mm}$  处,惯量耦合强度最小;各 ICI 最小值分别为: $ICI_1 = 9.964 \times 10^{-4}$ ;  $ICI_2 = 1.005 \times 10^{-3}$ ;  $ICI_3 = 1.004 \times 10^{-3}$ ;在 z 轴运动范围最大数值处,支链间的惯量耦合强度最大。

当  $\beta = 0$ ,动平台中心点 z 值处于初始状态时,动平台绕 O-XYZ 转动时,  $0.031 < M_i < 0.033$ ,  $0.0032 < |J| < 0.0034$ , 满足式(31, 35)的条件,惯量耦合特性随  $\alpha$  方向分布规律如图 6 所示。

图 6 中:支链 2、3 的耦合惯量随  $\alpha$  的变化一致,且变化范围较小;支链 1 的耦合惯量随着  $\alpha$  数值增大先小后增大且变化范围较大。

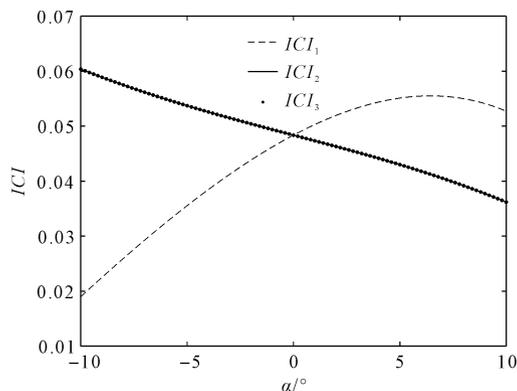


图 6 惯量耦合特性随  $\alpha$  方向分布规律

当  $\alpha = 0$ ,动平台中心点 z 值处于初始状态时,动平台绕 O-XYZ 转动时,  $0.031 < M_i < 0.033$ ,  $0.0032 < |J| < 0.0034$ , 满足式(31, 35)的条件,惯量耦合特性随  $\beta$  方向的分布规律如图 7 所示。

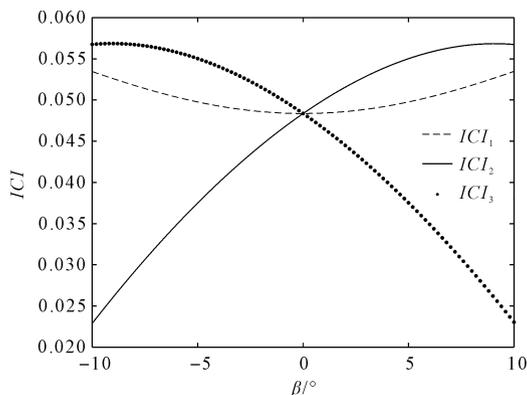


图 7 惯量耦合特性随  $\beta$  方向分布规律

图 7 中:支链 2、3 的耦合惯量随  $\beta$  的变化相反,这是因为支链 2、3 关于 Y 轴对称,且耦合惯量变化范围较大;支链 1 的耦合惯量随着  $\alpha$  数值增大先小后增大且变化范围较小。

## 4 结束语

针对动平台广义位姿、速度、速度存在耦合的问题,笔者通过机构约束方程、影响系数矩阵对其进行了解耦,建立了支链与动平台末端的映射关系,验证了解耦及解耦后运动学模型的正确性;基于虚功原理,笔者建立了 3-PRS 并联机构的动力学模型,通过仿真软件验证了模型的正确性;在关节空间中建立了机构的动力学模型,分析了机构支链间的惯量耦合特性。

研究表明:在并联机构可工作空间内,通过合理规划机构各个参数的运动范围,可在一定程度上减小主动支链间的耦合惯量,来提高并联机构的动态性能,但是不能从根本上消除。

在以后研究中,笔者将会基于并联机构惯量耦合特性的特点,将其应用于并联机构的具体设计研究当中。

### 参考文献 (References):

- [1] 荣 誉,刘双勇,王洪斌,等. 轮毂打磨 5-DOF 机械臂动力学建模与驱动参数预估[J]. 中国机械工程,2018,29(4):449-456.
- [2] 许允斗,仝少帅,王 贝,等. 2RPU-UPR 并联机构在天线支撑中的应用[J]. 中国机械工程,2019,30(14):1748-1755.
- [3] CHONG Z, XIE F, LIU X, et al. Design of the parallel mechanism for a hybrid mobile robot in wind turbine blades polishing[J]. **Robotics and Computer Integrated Manufacturing**,2019,61(2):1-9.
- [4] 窦玉超,侯荣伟,邓云蛟,等. 3-RSR 构型天线并联机构设计与仿真分析[J]. 机械制造,2019,57(8):49-53,68.
- [5] 贾俊国,王 俊,温华锋,等. 基于 3-RSR 并联机构的电动汽车大功率充电弓研究[J]. 机电工程技术,2020,49(1):96-99.
- [6] 李研彪,郑 航,孙 鹏,等. 考虑关节摩擦的 5-PSS/UPU 并联机构动力学建模及耦合特性分析[J]. 机械工程学报,2019,55(3):43-52.
- [7] 山显雷,程 刚. 高速运动下并联机器人主动支链的动力学耦合特性[J]. 机器人,2017,39(5):603-607.
- [8] LIU X, ZHAO T, LUO E, et al. Coupling 3-PSR/PSU 5-axis compensation mechanism for stabilized platform and its analysis[J]. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**,2013,227(7):1619-1629.
- [9] ZHANG X, MILLS J, CLEGHORN W. Coupling characteristics of rigid body motion and elastic deformation of a 3-PRR parallel manipulator with flexible links[J]. **Multibody System Dynamics**,2009,21(2):167-192.
- [10] GAO G, WEN J, LIU X, et al. Synchronous smooth sliding mode control for parallel mechanism based on coupling analysis[J]. **International Journal of Advanced Robotic Systems**,2013,10(173):1-10.
- [11] 何景峰,叶正茂,姜洪洲,等. 基于关节空间模型的并联机器人耦合性分析[J]. 机械工程学报,2006,42(6):161-165.
- [12] OGOBOBE P, JANG H, HE J, et al. Analysis of coupling effects on hydraulic controlled 6 degrees of freedom parallel manipulator using joint space inverse mass matrix[C]. The 2nd International Conferences on Intelligent Computation Technology and Automation. Changsha: [s. n], 2009.
- [13] 姚 郁,傅绍文,韩 蕾. Stewart 平台关节空间惯性矩阵块对角占优分析与判别[J]. 机械工程学报,2008,44(6):101-106.
- [14] SHAO Z, TANG X, CHEN X, et al. Research on the inertia matching of the stewart parallel manipulator[J]. **Robotics and Computer Integrated Manufacturing**,2012,28(6):649-659.
- [15] 王 冬,吴 军,王立平,等. 3-PRS 并联机器人惯量耦合特性研究[J]. 力学学报,2016,48(4):804-812.
- [16] LIU Z, TANG X, SHAO Z, et al. Dimensional optimization of the stewart platform based on inertia decoupling characteristic[J]. **Robotica**,2016,34(5):1151-1167.
- [17] 赵 庆,王攀峰,黄 田. 考虑链间耦合的高速并联机器人惯性参数预估方法[J]. 天津大学学报:自然科学与工程技术版,2017,50(8):868-876.
- [18] 王施相,郭 劲,甘新基,等. 激光聚焦次镜支撑小型三自由度机构运动分析[J]. 红外与激光工程,2015,44(12):3627-3633.
- [19] 陈修龙,陈林林,梁小夏. 4 自由度冗余驱动并联机构运动学和工作空间分析[J]. 农业机械学报,2014,45(8):307-313.
- [20] 张金柱,金振林,张 哲. 六足机器人整机运动学分析及构型选择[J]. 光学精密工程,2017,25(7):1832-1842.

[编辑:李 辉]

### 本文引用格式:

倪仕全,田大鹏. 3-PRS 并联机构的动力学惯量耦合特性分析[J]. 机电工程,2021,38(7):815-821.

NI Shi-quan, TIAN Da-peng. Dynamic inertia coupling characteristics analysis of 3-PRS parallel mechanism[J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2021,38(7):815-821.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>