

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2021.04.004

基于改进 SIMP 法的连续体 结构拓扑优化方法研究*

李启宏,李海艳*

(广东工业大学 机电工程学院,广东 广州 510006)

摘要:基于 SIMP 法的连续体结构拓扑优化,在小规模网格下的优化结构刚度性能不佳,而在大规模网格下优化结构又会出现过多细小分支,针对这一问题,提出了一种基于改进 SIMP 法的连续体结构拓扑优化方法。该方法对 SIMP 数学模型进行了改进,将单元微分法作为力学响应分析的理论基础,以全体单元中心点应力应变积之和为优化目标函数,并结合比例拓扑优化法对改进的数学模型进行了数值优化求解;最后,基于 ISIMP 法对悬臂梁进行了不同网格规模下的拓扑优化实验。研究表明:基于 ISIMP 法,悬臂梁的优化结构刚度得到了提升,并且在网格规模较小时,优化结构的刚度提升更为显著;同时,在网格规模很大时,该方法能有效减少细小分支的数量,提高优化结构的可制造性。

关键词:改进的 SIMP 法;单元微分法;比例拓扑优化;连续体结构拓扑优化

中图分类号:TH122;TB115

文献标识码:A

文章编号:1001-4551(2021)04-0428-06

Continuum structure topology optimization method based on improved SIMP method

LI Qi-hong, LI Hai-yan

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract: Aiming at the poor stiffness performance under the coarse mesh and too many branches under the fine mesh of the optimized structure based on SIMP for continuum structure topology optimization, a continuum structure topology optimization method based on improved SIMP method was proposed. The mathematical model of SIMP was improved that element differential method (EDM) was adopted as the theoretical basis for mechanical response analysis, the sum of products of stress and strain at the center point of all elements was used as the optimized objective function, and the proportional topology optimization (PTO) method was combined to solve the mathematical model numerically. Based on the ISIMP method, the cantilever beam was subjected to topology optimization experiments under different mesh scales. The results indicate that the stiffness of the optimized structure for the cantilever beam has a better stiffness performance and gets a more significantly improvement under the coarse mesh. Moreover, this method reduces the number of small branches effectively which improve the manufacturability of the optimized structure under the fine mesh.

Key words: improved SIMP (ISIMP); element differential method (EDM); proportional topology optimization (PTO); continuum structure topology optimization

0 引 言

变密度法^[1]是连续体结构拓扑优化^[2]的常用方法,是在工程领域中应用最广泛、商用最为成功的拓扑

优化方法。变密度法采用材料单元的密度作为设计变量,其设计变量的数量很少,容易通过编程实现,计算效率也高。

SIGMUND O 等^[3]对基于变密度法的建模方法进

收稿日期:2020-07-31

基金项目:国家自然科学基金资助项目(5177050476)

作者简介:李启宏(1996-),男,广东惠州人,硕士研究生,主要从事拓扑优化方面的研究。E-mail:1814386831@qq.com

通信联系人:李海艳,女,副教授,硕士生导师。E-mail:Cathylhy@gdut.edu.cn

行了卓有成效的研究,对不同材料中间密度惩罚方法进行了分析与对比,最终提出了固体各向同性惩罚微结构模型,即 SIMP 模型(solid isotropic microstructures with penali-zation, SIMP)^[4]; MARTINEZ J M^[5]对 SIMP 法的理论收敛性进行了研究;STOLPE M 等^[6]提出了材料属性的有理近似模型(rational approximation of material properties, RAMP),其使用有理式对材料中间密度进行了惩罚;陈祥等^[7]采用 RAMP 法建立了基于变密度理论的优化模型。目前,SIMP 法已经在不同的结构优化问题中得到了成功的应用,其引入一种假想的相对密度在 0~1 之间可变的材料,在一定的材料用量的条件下寻找具有最大刚度(结构的柔顺性最小)的结构材料最佳分布形式。

根据文献[8,9]的大量实验研究可发现,在使用 SIMP 法解决连续体结构拓扑优化问题时,其优化结构的刚度性能与力学响应分析的计算精度成正比关系。在网格规模较小时,SIMP 法的力学响应分析的计算精度欠佳,导致基于 SIMP 法的连续体结构拓扑优化得到的优化结构的刚度偏小。增大网格规模可提高其力学响应分析的计算精度,虽然优化结构的刚度得到了提高,但受限于网格依赖性等数值不稳定问题^[10],其优化结构的细小分支增多,导致结构的可制造性很差。

针对 SIMP 法的这些问题,笔者对 SIMP 法的数学模型进行改进,在力学响应分析理论上引入新型力学数值求解方法:单元微分法(EDM)^[11,12]以全体单元中心点应力应变积之和最小作为优化目标函数,再结合比例拓扑优化法(PTO)^[13]对改进的数学模型进行数值优化求解;通过悬臂梁案例验证改进的 SIMP 法,解决连续体结构拓扑优化存在的问题。

1 SIMP 法数学模型的改进

1.1 力学响应分析方法

FEM 是 SIMP 法力学响应分析的理论基础,具有求解简便、数值计算方法成熟等优势。同时 FEM 也具有一定的局限性,在网格规模较小时,其计算精度不高。本小节研究的 EDM 是 GAO Xiao-wei 等针对热力耦合问题提出的一种新型力学数值求解方法,其采用离散有限单元的分析形式,且对节点受力平衡的二阶偏微分方程^[14]的求解具有更高的力学分析计算精度。本研究将 EDM 作为 SIMP 法数学模型的力学响应分析方法,以提高计算精度,接下来推导其力学响应分析公式。

在节点方程配置上,传统的配置方法(traditional collocation method, TCM)^[15]通常是在所有节点中配置

平衡方程,并在边界节点处添加边界条件。而 EDM 在微分单元的内部节点中配置微分平衡方程,在交界节点和边界节点中配置牵引平衡方程。

对于微分单元的内部节点,其微分平衡控制方程如下:

$$\left[\mathbf{D}_{ijkl}(\xi) \frac{\partial^2 N_a(\xi)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial N_\beta(\xi)}{\partial x_j} \mathbf{D}_{ijkl}^\beta \frac{\partial N_a(\xi)}{\partial x_l} \right] \mathbf{u}_k^a + \mathbf{b}_i(\xi) = 0, \xi \in \Omega \quad (1)$$

式中: \mathbf{b}_i —体力; Ω —设计域; \mathbf{D} —单元弹性矩阵; \mathbf{N} —微分单元的形函数矩阵; \mathbf{u} —单元节点位移; ξ —单元内部的等参坐标,对于平面二维问题有 $\xi = (\xi, \eta)$ 。

对于由多个单元共有的交界节点,其包含该节点的所有表面,满足牵引平衡条件:

$$\sum_{e=1}^{N^l} \sum_{s=1}^{S^{el}} \mathbf{t}_i^s(\xi^{el}) = 0 \quad (2)$$

交界节点的牵引平衡方程如下式:

$$\sum_{e=1}^{N^l} \sum_{s=1}^{S^{el}} \mathbf{D}_{ijkl}(\xi^{el}) \mathbf{n}_j^s(\xi^{el}) \frac{\partial N_a(\xi^{el})}{\partial x_l} \mathbf{u}_k^a = 0, \xi^{el} \in \Gamma_l \quad (3)$$

式中: N^l —共有该节点 N 的单元数量; S^{el} —单元 e 中与节点 l 相连的表面数量; ξ^{el} —节点 l 在单元 e 内部的等参坐标; \mathbf{n}_i^s —表面 s 的外法向; Γ_l —单元间的交界面; \mathbf{t}_i^s —表面 s 上的牵引力。

对于位于结构外部的边界节点,牵引力作用于该节点,也满足牵引平衡条件。

边界节点牵引力平衡方程为:

$$\sum_{e=1}^{N^b} \sum_{s=1}^{S^{eb}} \mathbf{D}_{ijkl}(\xi^{eb}) \mathbf{n}_j^s(\xi^{eb}) \frac{\partial N_a(\xi^{eb})}{\partial x_l} \mathbf{u}_k^a = \sum_{e=1}^{N^b} \sum_{s=1}^{S^{eo}} \bar{\mathbf{t}}_i^s(\xi^{eb}), \xi^{eb} \in \Gamma_l \quad (4)$$

式中: N^b —共有节点 b 的单元数量; S^{eb} —单元 e 中与节点 b 相连的表面总数; S^{eo} —单元 e 中与节点 o 相连外表面的数量; ξ^{eb} —节点 b 在单元 e 中的等参坐标值; $\bar{\mathbf{t}}_i^s$ —外表面 s 上的外部牵引力。

将结构设计离散为有限单元,对整体节点进行编号,将单元的节点配置方程按节点编号叠加到相应的位置,形成全局节点配置方程组;最终方程组中的未知数在全局节点序列中进行编号,并将边界条件的指定位移和牵引力代入节点配置方程中。

最终的全局节点配置方程组形式如下:

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (5)$$

式中: \mathbf{u} —整体节点的位移; \mathbf{b} —整体节点的牵引力; \mathbf{A} —由每个节点方程的系数构成的系数矩阵。

将式(5)作为 SIMP 法数学模型的力学响应分析式。

1.2 目标函数优化

SIMP 法是以柔顺性最小为优化目标进行拓扑优

化,其柔顺性越小,优化结构的刚度越大。提高 SIMP 法的力学响应分析计算精度可得到柔顺性更小的优化结构,而理论上更小的柔顺性常常与结构的合理性相矛盾。当网格规模很大时,虽然 SIMP 法的力学分析计算精度很高,但同时优化结构会出现很多不同的局部最优结构,表现为优化结构出现很多细小的分支。而过多的细小分支不符合实际的生产理念,其可制造性很差。

SIMP 法数学模型是连续体结构拓扑优化最为常用的密度插值模型^[16],以柔顺性最小为优化目标,即追求优化结构的综合形变最小。受该思想原理的启发,以追求优化结构的最佳综合应力应变表现为出发点,再结合 EDM 含内部节点的特点,笔者提出以全体单元中心点应力应变积之和最小作为 SIMP 法数学模型的优化目标。

将单元中心点应力应变积与单元的插值密度 x 和材料弹性模量 E 相关联,则优化目标函数构造如下:

$$\begin{aligned} \text{Min}; C(X) &= \sum_{i=1}^N [E_{\min} + x_i^p (E_0 - E_{\min})] \sigma_i^T \varepsilon_i \\ \varepsilon_i &= \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i, \sigma_i = \mathbf{D} \varepsilon_i \end{aligned} \quad (6)$$

式中: x_i —单元密度设计变量; N —单元数量; p —惩罚因子; σ_i —单元中心点的应变; ε_i —单元中心点的应变; \mathbf{B}_i —单元应变矩阵; E_0 —实体材料弹性模量; E_{\min} —空洞材料弹性模量。

在追求综合形变最小时,柔顺性目标函数因忽略实际生产理念,过多的细小分支导致优化结构的可制造性很差。笔者提出的目标函数更加注重优化结构每个单元的应力和应变的状态,为结合新型数值求解方法以减少细小分支数量的研究打下基础。

2 改进的 SIMP 法

2.1 数学模型的构建

由于前面笔者已分别用式(5,6)取代 SIMP 法数学模型中,原有的 FEM 力学响应分析理论和最小柔顺性目标函数,至此,已完成对 SIMP 法数学模型的改进,并提出一种改进的 SIMP 法 (ISIMP 法),其数学模型构建如下:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Find } \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \\ \text{Min}; C(X) &= \sum_{i=1}^N [E_{\min} + x_i^p (E_0 - E_{\min})] \sigma_i^T \varepsilon_i \\ \text{s. t. :} & \\ &V \leq fV_0 \\ &\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \\ &0 < x_{\min} \leq x_i \leq 1 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

式中: \mathbf{x} —单元密度矩阵; x_{\min} —单元密度最小值,取 0.001; $C(X)$ —优化目标函数; V —优化后的结构体积; V_0 —结构的初始体积; f —体积约束参数。

2.2 数值优化求解方法

PTO 法是由 Biyikli 于 2015 年提出的一种新型拓扑优化数值求解算法。在应力约束问题和最小柔顺性问题中,根据每个单元所占总体应力和总体柔顺性的应力比和柔顺性比,PTO 法将材料分配给相应单元。而全体单元中心点应力应变积之和目标函数涉及到最能反应受力结构力学状态的单元应力与应变,所以笔者结合 PTO 法对 ISIMP 法数学模型进行数值优化求解,在每次迭代优化中,将材料根据每个单元中心点应力应变积占全体单元应力应变积之和的比例大小,分配给相应单元。其基本步骤如下:

(1) 在计算单元中心点,应力应变积占总体单元应力应变积之和的比例为:

$$C_{\text{pro}} = \frac{C_i}{\sum_{i=1}^n C_i} \quad (8)$$

式中: C_i —第 i 个单元的应力应变积; C_{pro} —单元贡献比例; n —单元总数。

(2) 在内循环中,将剩余体积按单元的应力应变积占总体单元应力应变积之和的比例大小分配给每个单元,其分配公式为:

$$x_{i+1}^{\text{pro}} = x_i^{\text{pro}} + RM * C_{\text{pro}} \quad (9)$$

式中: x_{i+1}^{pro} —当前的单元密度; x_i^{pro} —上次优化迭代的单元密度; RM —剩余体积。

(3) 当剩余体积少于 0.001 时,退出内循环,完成一次 PTO 法迭代更新。此处定义历史平衡系数 α ,本文取 $\alpha = 0.5$,用于平衡当前更新得出的密度与上一次更新得出的密度,其更新方案可表示为:

$$x_i^{\text{new}} = \alpha x_i^{\text{pre}} + (1 - \alpha) x_i^{\text{pro}} \quad (10)$$

式中: x_i^{pre} —上一次 PTO 法迭代更新的单元密度; x_i^{pro} —当前 PTO 法迭代更新的单元密度; x_i^{new} —平衡更新的单元密度。

2.3 应用与算法设计

为解决 SIMP 法在求解连续体结构拓扑优化问题中存在的缺陷,笔者将 ISIMP 法应用在连续体结构的拓扑优化上。基于 ISIMP 法的连续体结构拓扑优化方法的主要步骤为:

(1) 将设计域离散为有限单元网格,并对网格节点进行编号;定义约束条件及载荷等边界条件;

(2) 按照不同的节点类型配置节点方程,根据节点编号组装全局节点的 EDM 方程组;

(3)求解 EDM 方程组得到节点位移矢量,计算全体单元中心应力应变积之和目标函数;

(4)并结合 PTO 法对 ISIMP 数学模型进行数值优化求解,以更新单元密度;

(5)若连续两次迭代的单元密度最大变化小于 0.01,或迭代次数达到 100 次,则终止迭代优化,并输出单元密度分布结果;否则重复步骤(3,4)。

基于 ISIMP 法的连续体结构拓扑优化流程图如图 1 所示。

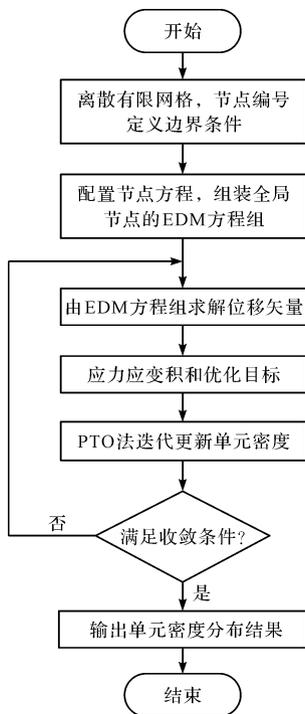


图1 基于 ISIMP 法的连续体结构拓扑优化流程图

3 悬臂梁实验

悬臂梁(实验无量纲)长宽比为 3: 1,梁左侧固定约束,梁的上边界施加大小为 1 000 的均匀分布载荷(将均匀分布载荷等效为集中力作用到节点上)。

悬臂梁拓扑优化实验的基本参数设置为:结构弹性模量 $E_0 = 210$,材料的泊松比 $\mu = 0.3$,惩罚因子 $p = 3$,过滤半径 $r = 1.5$,材料的体积约束为 0.4。

悬臂梁模型图如图 2 所示。

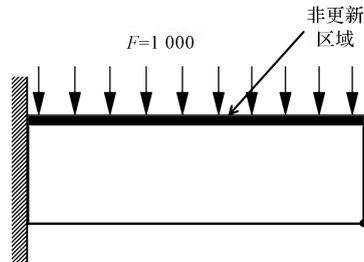


图2 悬臂梁模型图

3.1 实验基本设定

为保证悬臂梁始终受均布载荷,实验中将悬臂梁上边厚度为宽度乘 0.2 的区域设置为密度不更新区域,即使该区域单元密度保持为 1。为保持数值求解方法的一致性,笔者基于 SIMP 法的连续体结构拓扑优化同样结合 PTO 法进行数值优化求解。为了对基于 SIMP 法与 ISIMP 法的悬臂梁优化结构的性能进行对比,该实验以优化结构的柔顺性作为对比指标。优化结构的柔顺性越小,其刚度则越大。

对基于 ISIMP 法的连续体结构拓扑优化的单元密度分布结果,笔者同样使用 FEM 进行力学分析,计算优化结构的节点位移,从而计算优化结构的柔顺性大小。

3.2 悬臂梁拓扑优化

首先,在不同网格规模下,笔者分别使用 SIMP 法与 ISIMP 法的力学响应分析理论基础,对悬臂梁进行力学响应分析,通过对比悬臂梁右下角节点的 Y 方向位移 u_y (该实验以 $3\ 000 \times 1\ 000$ 的超大规模网格进行 FEM 力学响应分析的结果作为假定理论值, $u_y = -215.298\ 0$),来比较 SIMP 法的 FEM 与 ISIMP 法的 EDM 在力学响应分析上的计算精度。

悬臂梁右下角节点的 Y 方向位移及误差如表 1 所示。

表1 悬臂梁右下角节点的 Y 方向位移

网格规模	FEM	FEM 误差	EDM	EDM 误差	误差减少
60 × 20	-214.834 4	0.463 6	-215.220 9	0.077 1	0.386 5
120 × 40	-215.156 0	0.142 0	-215.278 6	0.019 4	0.122 6
180 × 60	-215.226 1	0.071 9	-215.284 9	0.013 1	0.058 8
240 × 80	-215.253 5	0.044 5	-215.288 8	0.009 2	0.035 3
300 × 100	-215.267 3	0.030 7	-215.291 2	0.006 8	0.023 9
360 × 120	-215.275 4	0.022 6	-215.292 7	0.005 3	0.017 3

由表 1 可知,EDM 的力学响应分析的计算误差随网格规模的增大而减小,具有良好的收敛性。与 FEM 相比,EDM 在同一网格规模的力学响应分析中具有更

高的计算精度;在网格规模较小的力学响应分析中,精度提升更为明显。

接着,在不同网格规模下,笔者分别进行了基于

SIMP 法与 ISIMP 法的悬臂梁拓扑优化实验。

基于 ISIMP 法,在不同网格规模下的悬臂梁拓扑优化的优化结构柔顺性的变化曲线图,如图 3 所示。

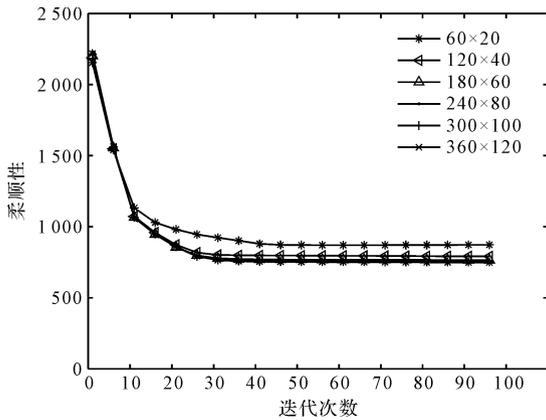


图 3 ISIMP 法-柔顺性变化曲线图

由图 3 可知,在迭代优化过程中,基于 ISIMP 法的悬臂梁拓扑优化的柔顺性逐步减小,具有良好的收敛性,由此可以验证 ISIMP 法在连续体结构拓扑优化上的可行性。

两种方法的悬臂梁优化结构的柔顺性,以及基于

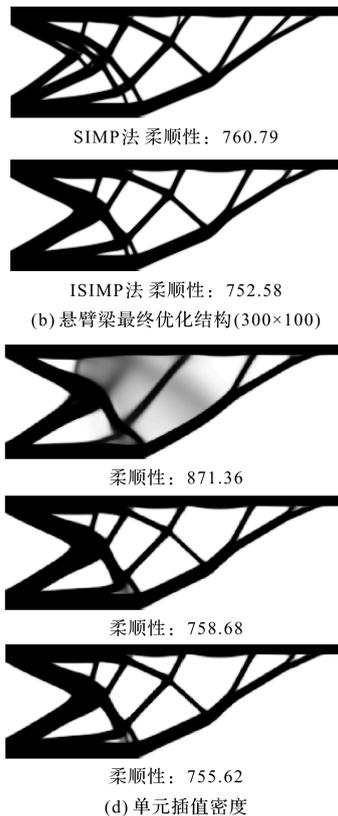


图 4 悬臂梁拓扑优化实验结果图

由表 1 可知,在小规模网格实验中,相比 FEM, EDM 的力学响应分析的计算精度优势更大。

由图 4(a)可知:在网格规模为 60 × 20 实验中,两种方法的优化结构大致相同,但基于 ISIMP 法的优化

ISIMP 法的优化结构柔顺性,相对于基于 SIMP 法的优化结构柔顺性的降低率,如表 2 所示。

表 2 悬臂梁优化结构的柔顺性

网格规模	SIMP 法-柔顺性	ISIMP 法-柔顺性	柔顺性降低率
60 × 20	939.61	888.77	5.41%
120 × 40	822.35	798.45	2.91%
180 × 60	788.80	768.67	2.55%
240 × 80	770.11	757.95	1.58%
300 × 100	760.79	752.58	1.08%
360 × 120	754.51	749.15	0.71%

结合表(1,2)数据可知;SIMP 法的 FEM 与 ISIMP 法的 EDM 的力学响应分析的计算精度,都随着网格规模的增大而提高,悬臂梁优化结构的柔顺性都随之减小,即刚度随之增大;在同一网格规模下,EDM 的力学响应分析的计算精度比 FEM 更高;基于 ISIMP 法的悬臂梁拓扑优化得到了柔顺性更小的优化结构,即悬臂梁优化结构的刚度性能得到了提升。

最后,在小规模网格和大规模网格下,笔者对悬臂梁的实验结果进行分析。

悬臂梁的拓扑优化实验结果图如图 4 所示。

结构柔顺性相对于 SIMP 法的减小了 5.41%,刚度明显提升;

图 4(c ~ d)记录了网格规模为 300 × 100 的悬臂梁拓扑优化的迭代次数为 20 次、40 次和 60 次时,单元中

心点应力应变积与单元插值密度的分布。由此可知,基于 ISIMP 法的悬臂梁拓扑优化在前 40 次迭代中,逐步形成稳定的传力路径区域,且在传力路径区域上的单元中心点应力应变积明显高于其他区域;再结合 PTO 法在数值优化求解中,将材料根据单元中心点应力应变积占全体单元应力应变积之和的比例大小,分配给相应单元的密度插值方法,那么可知在传力路径区域上,绝大多数单元将在后续的迭代优化中继续保持实体材料密度。

对比图 4(b) 中的网格规模为 300×100 的悬臂梁最终优化结构可知,基于 ISIMP 法的悬臂梁优化结构有效地减少了细小分支的数量,提高了优化结构的可制造性。

4 结束语

本研究对 SIMP 法的数学模型进行了改进,提出了一种基于改进 SIMP 法的连续体结构拓扑优化方法;通过悬臂梁案例对改进的 SIMP 法进行了验证,解决了连续体结构拓扑优化存在的问题。

与基于 SIMP 的方法相比,基于 ISIMP 法的连续体结构拓扑优化方法的优势有:

(1) 在同一网格规模下,得益于 EDM 更高精度的力学响应分析,该方法可得到柔顺性更小的优化结构,即优化结构的刚度性能得到了提升;并且在网格规模较小时,刚度提升更加明显;

(2) 全体单元应力应变积之和目标函数更加注重优化结构每个单元的应力和应变的状态,再结合 PTO 法进行数值优化求解的方法,在大规模网格下,可有效减少细小分支的数量,提高优化结构的可制造性。

参考文献 (References):

[1] MLEJNEK H P, SCHIRRMACHER R. An engineer's approach to optimal material distribution and shape finding [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, 106(1-2): 1-26.

[2] 罗震, 陈立平, 黄玉盈, 等. 连续体结构的拓扑优化设计 [J]. *力学进展*, 2004(4): 463-476.

[3] SIGMUND O. Design of material structures using topology optimization [D]. Denmark: Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, 1994.

[4] RIETZ A. Sufficiency of a finite exponent in SIMP (Power law) method [J]. *Structural and Multidiscipline Optimization*, 2001(21): 159-163.

[5] MARTINEZ J M. A note on the theoretical convergence properties of the SIMP method [J]. *Structural Multidiscipline Optimization*, 2005(29): 319-323.

[6] STOLPE M, SVANBERG K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization [J]. *Structural and Multidiscipline Optimization*, 2001(22): 116-124.

[7] 陈祥, 刘辛军. 基于 RAMP 插值模型结合导重法求解拓扑优化问题 [J]. *机械工程学报*, 2012, 48(1): 135-140.

[8] SIGMUND O. A 99 line topology optimization code written in Matlab [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21(2): 120-127.

[9] SCHEVENELS M, SIGMUND O, ANDREASSEN E, et al. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(1): 1-16.

[10] 左孔天, 王书亭, 陈立平, 等. 拓扑优化中去除数值不稳定性算法的研究 [J]. *机械科学与技术*, 2005, 24(1): 86-93.

[11] GAO Xiao-wei, LI Zong-yang, YANG Kai, et al. Element differential method and its application in thermal-mechanical problems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2018, 113(1): 82-108.

[12] GAO Xiao-wei, LIU Hua-yu, XU Bing-bing, et al. Element differential method with the simplest quadrilateral and hexahedron quadratic elements for solving heat conduction problems [J]. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 2018, 73(4): 206-224.

[13] BIYIKLI E, ALBERT C T. Proportional topology optimization: a new non-sensitivity method for solving stress constrained and minimum compliance problems and its implementation in MATLAB [J]. *PloS ONE*, 2015, 10(12): 10145041.

[14] HAUSENBLAS E, MARCHIS I. A numerical approximation of parabolic stochastic partial differential equations driven by a Poisson random measure [J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2006, 46(4): 773-811.

[15] WAGNER G J, LIU W K. Application of essential boundary conditions in mesh-free methods: a corrected collocation method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 47(8): 1367-1379.

[16] 杜义贤, 张严, 李涵钊, 等. 具有极化特性的拓扑优化节点密度插值方法 [J]. *机械设计*, 2018, 35(3): 80-85.

[编辑: 李辉]

本文引用格式:

李启宏, 李海艳. 基于改进 SIMP 法的连续体结构拓扑优化方法研究 [J]. *机电工程*, 2021, 38(4): 428-433.

LI Qi-hong, LI Hai-yan. Continuum structure topology optimization method based on improved SIMP method [J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2021, 38(4): 428-433.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>