

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2020.11.023

Hopf 映射在机械臂四元数姿态规划中的应用研究^{*}

普亚松^{1,2}, 张文斌^{1*}, 蔺小军², 郭德伟¹, 闵洁¹

(1. 红河学院 工学院, 云南 蒙自 661199; 2. 西北工业大学 现代设计与集成制造技术实验室, 陕西 西安 710072)

摘要:针对有些机械臂姿态规划的四元数插值算法比较复杂、导数不易求得、较难判断其插值是否平滑的问题,进行了运用四元数插值曲线判断插值平滑性的研究。提出了 Hopf 映射应用于四元数插值曲线,利用 Hopf 映射的降维特性,将机械臂四元数姿态规划的四维插值点转换为三维向量,在单位球面上绘制了四元数插值曲线,通过三维空间的插值曲线直观判断四维插值的平滑性;运用相关算例对该方法的可行性进行了验证。研究表明:该方法避免了复杂四元数插值函数的求导过程,能够判断四元数插值是否平滑,操作是否简便;球面立体插值法比球面线性插值法更适合于两个以上的多姿态四元数插值。

关键词:机械臂姿态规划;单位四元数;平滑插值;Hopf 映射

中图分类号:TP241

文献标识码:A

文章编号:1001-4551(2020)11-1387-06

Application of Hopf mapping in quaternion orientation planning of manipulator

PU Ya-song^{1,2}, ZHANG Wen-bin¹, LIN Xiao-jun², GUO De-wei¹, MIN Jie¹

(1. School of Engineering, Honghe University, Mengzi 661199, China; 2. Laboratory of Contemporary Design and Integrated Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Aiming at the problems that some quaternion interpolation algorithms were comparatively complex, difficult to find the derivatives, and hard to judge whether the quaternion interpolation was smooth, a study on judging the smoothness of interpolation using quaternion interpolation curve was conducted. It was proposed that Hopf mapping was applied to quaternion interpolation curves, and the four-dimensional interpolated points of quaternion orientation planning of robot manipulator were converted to three-dimensional vectors relying on the dimensionality reduction feature of Hopf mapping. Consequently, quaternion interpolation curves were obtained on the unit sphere, and the judgment was made intuitively whether the four-dimensional interpolation were smooth depending on the interpolation curves in three-dimensional space. The feasibility of the proposed methodology was verified by relevant study case. The results indicate that the suggested methodology avoids the derivation of complex quaternion interpolation function, and can be applied well to judge whether quaternion interpolation is smooth, and the usage is simple. The Spherical and Quadrangle (SQUAD) is more suitable than Spherical Linear Interpolation (SLERP) for quaternion interpolation with more than two orientations.

Key words: robot manipulator orientation planning; unit quaternion; smooth interpolation; Hopf mapping

收稿日期:2020-02-24

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51675439);云南省高校重点实验室建设资助项目(2018ZD022);云南省高校科技创新团队建设资助项目(2019KC038)

作者简介:普亚松(1976-),男,云南蒙自人,博士研究生,讲师,主要从事工业机器人抛光、机械 CAD/CAM 方面的研究。E-mail:377821053@qq.com

通信联系人:张文斌,男,博士,教授。E-mail:190322507@qq.com

0 引 言

机械臂的姿态规划直接影响到机械臂的工作性能^[1]。描述机械臂末端姿态的方法主要有欧拉角、旋转矩阵与四元数法。采用欧拉角时,当第 2 个欧拉角接近 90°时,会出现奇异现象^[2],旋转角会发生突变,称为“万向节锁死”现象。旋转矩阵需要用 9 个元素描述姿态,运算效率低且不利于插值。四元数不存在“万向节锁死”的现象,运算效率高,且便于插值,因此四元数被广泛应用于描述旋转姿态。

机械臂要完成某项工作任务,有时需要经历某几个关键的有限姿态 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, 也即机械臂的末端执行器在某个时刻需要呈现规定的工作角度 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 。除了这些规定的关键姿态之外,并没有规定机械臂的工作姿态应该呈现什么角度,因此需要在各关键姿态之间进行合理的插值,确定中间姿态,即机械臂姿态规划。因其特有的优势,四元数常被用于机械臂的姿态规划^[3-5]。

判断四元数姿态插值是否平滑的方法有求导法及图形法。四元数的求导比一般函数的难度更大,且有些四元数插值算法本身就比较复杂,给求导带来较大的困难^[6]。相对而言,图形法更加简单、直观、方便。然而四元数是四维向量,不能直接在三维空间中直观地表达姿态的插值曲线。为了便于观察插值曲线是否平滑,需要研究将四元数插值点映射到三维空间。

Hopf 映射是一个由四维空间的超球面 S^3 到三维空间的球面 S^2 的连续满射,它由 Heniz Hopf 发现。Hopf 映射及其拓展理论在工程领域有广泛的应用,例如应用于多参数非线性控制系统^[7]、碰撞振动系统分析^[8]等。降维映射是 Hopf 映射的特征之一,应用 Hopf 映射可以把四维向量降维映射到三维空间,可运用于四元数插值,并绘制插值曲线。

笔者提出一种运用四元数插值曲线判断插值平滑性的方法,并运用相关算例对该方法的可行性进行验证。

1 机器臂姿态四元数路径规划

1.1 四元数

四元数 Q 的定义如下:

$$Q = w + xi + yj + zk \quad (1)$$

式中: w —四元数的实部,为任意实数; x, y, z —四元数的虚部,均为任意实数; i, j, k —复数单位。

当四元数的实部为 0 时,称为纯四元数。四元数也可写为向量的形式:

$$Q = (w, x, y, z) = (w, u) \quad (2)$$

式中: u —虚部向量, $u = (x, y, z)$ 。

共轭四元数 Q^* 的定义为:

$$Q^* = w - xi - yj - zk \quad (3)$$

一对共轭四元数,实部相同,虚部互为相反数。

四元数的模 $\|Q\|$ 定义为:

$$\|Q\| = \sqrt{QQ^*} = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \quad (4)$$

当四元数的模等于 1 时,也即 $\|Q\| = 1$,称为单位四元数。一般情况下,用于表达物体旋转姿态的四元数都是单位四元数。

四元数的逆 Q^{-1} 定义为:

$$Q^{-1} = Q^*/Q^2 \quad (5)$$

因为单位四元数的模等于 1,所以单位四元数的逆等于其共轭,即 $Q^{-1} = Q^*$ 。

四元数还可以写成旋转角与旋转轴的关系:

$$Q = [\cos(\varphi/2), \sin(\varphi/2) * (a, b, c)] \quad (6)$$

式中: φ —旋转角; (a, b, c) —转轴矢量,转轴矢量需要转换为单位向量。

四元数描述旋转的物理意义:刚体内某一质点位置为 v_0 ,刚体经过姿态旋转 Q 之后,该质点的在原坐标系中的位置发生变化,即:

$$v_1 = Qv_0Q^{-1} \quad (7)$$

式中: v_0 —质点转动前的位置,属于纯四元数; v_1 —质点旋转后的位置,属于纯四元数; Q —转动四元数; Q^{-1} —转动四元数的逆。

1.2 四元数插值法

机器臂姿态四元数路径规划常用的方法有:球面线性插值法(SLERP)和球面立体插值法(SQUAD)。

球面线性插值法主要适合于两个姿态间的四元数插值,表达式为^[9]:

$$\text{SLERP}(Q_1, Q_2, t) = \frac{\sin[(1-t)\theta]}{\sin(\theta)}$$

$$Q_1 + \frac{\sin(t\theta)}{\sin(\theta)}Q_2 \quad t \in [0, 1] \quad (8)$$

式中: Q_1 —第一个关键姿态; Q_2 —第二个关键姿态; θ —向量 Q_1 与 Q_2 的夹角, $\cos\theta = Q_1 \cdot Q_2$, 其中 $Q_1 \cdot Q_2$ 是两个向量的点乘; t —插值变量,在 $[0, 1]$ 范围内取值,可以得到一系列的插值四元数。

球面立体插值法是球面线性插值法的多次运用,适合于多个姿态间的四元数插值,表达式为^[10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{SQUAD}(Q_i, Q_{i+1}, S_i, S_{i+1}, h) = \text{SLERP}[\text{SLERP}(Q_i, Q_{i+1}, h), \\ \text{SLERP}(S_i, S_{i+1}, h), 2h(1-h)] \\ S_i = Q_i * \exp\left(-\frac{\ln(Q_i^{-1} * Q_{i-1}) + \ln(Q_i^{-1} * Q_{i+1})}{4}\right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, \dots, n-1 \quad h \in [0, 1] \\ i = 0, 1, \dots, n-1 \end{array} \quad (9)$$

式中: Q_i —某个插值姿态; Q_{i+1} —下一个插值姿态, $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}$ 是若干个关键姿态; S_i —某个辅助四元数; S_{i+1} —下一个辅助四元数, $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ 是若干个辅助四元数; h —插值变量, 在 $[0, 1]$ 范围内取值, 可以得到一系列的插值四元数。

要进行插值运算, 需先求出辅助四元数 $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$, 其求取辅助四元数方法如式(9)的第2个式子。

在求第一个辅助四元数 S_0 时, 需要使用到 Q_{-1} 。但因为不存在 Q_{-1} , 所以规定第一个辅助四元数等于第一个关键姿态, 即 $S_0 = Q_0$ 。同理, 规定最后一个辅助四元数等于最后一个关键姿态, 即 $S_{n-1} = Q_{n-1}$ 。

判断四元数插值是否平滑, 需要对插值函数进行求导。但是可以看出, 在式(9)对变量 h 求导时, 不易求出其导数, 可以采用图形法绘制插值曲线, 观察插值曲线是否平滑。

绘制四元数插值曲线核心的问题即怎样把四维向量转化为三维向量, 在三维空间中表达出来。

2 Hopf 映射在机械臂姿态四元数规划中的应用

2.1 Hopf 映射与四元数插值曲线

Hopf 映射是关于不同域之间的映射关系。存在任意的四维向量 (q_0, q_1, q_2, q_3) , 向量各元素均为实数, 且满足 $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, 这样的四维向量组成的向量空间定义为 S^3 域。 S^3 域是四维向量空间的特殊子集, 是半径等于 1 的四维单位球表面上的点的集合。

存在任意的三维向量 (X, Y, Z) , 向量各元素均为实数, 且满足 $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, 这样的三维向量组成的向量空间定义为 S^2 域。 S^2 域是三维向量空间的特殊子集, 是半径等于 1 的三维单位球表面上的点的集合。

Hopf 映射是 S^3 域到 S^2 域的映射, 表达式为^[11]:

$$\begin{cases} X = 2(q_0q_1 + q_3q_4) \\ Y = 2(q_0q_4 - q_2q_3) \\ Z = q_0^2 - q_1^2 + q_3^2 - q_4^2 \end{cases} \quad (10)$$

式中: (q_0, q_1, q_2, q_3) — S^3 域的元素; (X, Y, Z) — S^2 域的元素。

从式(10)可以看出, 通过 Hopf 映射, 四维单位球面上的四维向量 (q_0, q_1, q_2, q_3) 经过降维, 可以映射成为三维单位球面上的三维向量 (X, Y, Z) 。

用于描述转动的四元数通常情况下都是单位四元数, 单位四元数的模为 1, 即单位四元数向量各元素的平方和等于 1, 满足属于 S^3 域的条件, 因此单位四元数是四维单位球面上的点, 即 $Q \in S^3$ 。所以通过 Hopf 映射可以把单位四元数插值点映射到三维球面上, 并绘制三维曲线, 从而判断四元数插值曲线是否平滑。

2.2 基于构造曲线的四元数插值曲线

有关学者提出一种刚体姿态变换的四元数转换为单位球面三维矢量的插值曲线, 即四元数姿态变换曲线, 即^[12-13]:

$$Q(t) = s(t) * s_0^{-1} \quad (11)$$

式中: $Q(t)$ —姿态变换四元数; $s(t)$ —构造的经过单位球面的三维矢量插值函数; s_0^{-1} —构造的三维矢量插值的初始值的逆。

三维空间构造的函数对应的矢量都认作实部为 0 的纯四元数。

四元数构造曲线如图 1 所示。

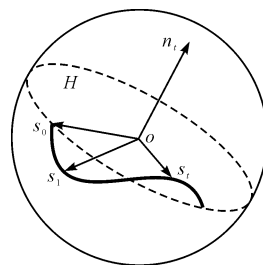


图 1 四元数插值构造曲线

对单位四元数姿态曲线的构造等价于对欧氏空间中, 单位球面三维矢量在单位球面上滑动所构成的曲线函数为 $s(t)$ 。

可以用插值四元数反求三维空间的构造曲线 $s(t)$, 即:

$$s(t) = Q(t) * s_0 = P_0^{-1} * P(t) * s_0 \quad (12)$$

式中: P_0^{-1} —初始姿态四元数的逆; $P(t)$ —姿态插值四元数; s_0 —三维构造曲线的初始点矢量。

将式(12)进一步展开, 则三维空间的构造曲线 $s(t)$ 更加具体的表达式如下:

$$s(t) : \begin{cases} W = -c_1(a_0b_1 - a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2) - c_2(a_0b_2 - a_2b_0 + a_1b_3 - a_3b_1) - c_3(a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_0) \\ X = c_1(a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) - c_2(a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_0) + c_3(a_0b_2 - a_2b_0 + a_1b_3 - a_3b_1) \\ Y = c_2(a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + c_1(a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_0) - c_3(a_0b_1 - a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2) \\ Z = c_3(a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) - c_1(a_0b_2 - a_2b_0 + a_1b_3 - a_3b_1) + c_2(a_0b_1 - a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2) \end{cases} \quad (13)$$

式中: (a_0, a_1, a_2, a_3) —初始姿态四元数, 也即 P_0 ; (b_0, b_1, b_2, b_3) —姿态插值四元数, 也即 $P(t)$; $(0, c_1, c_2, c_3)$ —三维构造曲线的初始点矢量, 也即 s_0 ; (W, X, Y, Z) —构造曲线 $s(t)$ 的位置向量。

从式(13)中可以看出: 相对于 Hopf 映射方法, 该方法更复杂、运算效率更低; 且要使构造曲线 $s(t)$ 成为三维矢量, 式中的 W 必须为 0, 那么构造曲线的初始点矢量 s_0 不能随意取值, 必须与姿态变换量 $Q(t)$ 的转轴矢量 n_i 正交, 即初始值 s_0 的取值要限制在过球心的 n_i 的垂平面与单位球面相交的截圆 H 上, 增加额外的计算量。

实际上, 该方法更适合于两姿态之间四元数插值曲线的绘制。可见, 笔者提出的 Hopf 映射绘制四元数插值曲线的方法更简洁实用。

3 仿真实验及结果分析

为了验证 Hopf 映射在机械臂姿态四元数规划中的可行性, 笔者通过算例来进行分析说明。

算例: 机械臂要完成某个焊接任务, 要经历 3 个关

键姿态, 初始姿态为绕固定坐标系 X 轴转 45° , 第 2 个姿态为绕固定坐标系 Z 轴转 60° , 最后姿态为固定坐标系下绕转轴 n 转 15° , 转轴 n 的矢量为 $(1, 2, 3)$, 对这 3 个关键姿态进行四元数姿态平滑插值。

(1) 采用球面线性插值法 (SLERP) 进行机械臂姿态四元数插值:

第一步: 把 3 个关键姿态转化为四元数, 其中第 3 个关键姿态转化为四元数之前, 需要把转轴矢量转化为单位矢量。根据式(6), 这 3 个关键姿态的四元数分别为: $Q_1 = (0.924, 0.383, 0, 0)$, $Q_2 = (0.866, 0, 0, 0.5)$, $Q_3 = (0.991, 0.035, 0.07, 0.105)$;

第二步: 根据式(8), 采用球面线性插值法在 Q_1 与 Q_2 、 Q_2 与 Q_3 姿态之间进行四元数插值;

第三步: 根据式(10), 采用 Hopf 映射, 把四元数插值点转化为三维球面上的三维向量;

第四步: 在三维球面上绘制四元数插值曲线, 根据插值曲线的平滑性判断四元数插值是否平滑。

SLERP 四元数插值及 Hopf 映射如表 1 所示。

表 1 SLERP 四元数插值及 Hopf 映射(部分)

序号	变量 t	第一段四元数插值及 Hopf 映射		第二段四元数插值及 Hopf 映射	
		四元数插值点(部分)	映射到三维球面	四元数插值点(部分)	映射到三维球面
		(q_0, q_1, q_2, q_3)	(X, Y, Z)	(q_0, q_1, q_2, q_3)	(X, Y, Z)
1	0	(0.924, 0.383, 0, 0)	(0.707, 0, 0.707)	(0.866, 0, 0, 0.5)	(0, 0.866, 0.5)
2	0.1	(0.936, 0.349, 0, 0.054)	(0.653, 0.1, 0.751)	(0.886, 0.004, 0.007, 0.463)	(0.013, 0.821, 0.571)
3	0.2	(0.943, 0.314, 0, 0.107)	(0.592, 0.202, 0.780)	(0.905, 0.007, 0.014, 0.426)	(0.025, 0.770, 0.637)
4	0.5	(0.943, 0.202, 0, 0.264)	(0.381, 0.497, 0.780)	(0.950, 0.018, 0.036, 0.309)	(0.056, 0.587, 0.808)
5	0.8	(0.908, 0.082, 0, 0.410)	(0.147, 0.745, 0.650)	(0.980, 0.028, 0.056, 0.188)	(0.077, 0.365, 0.928)
6	1	(0.866, 0, 0, 0.5)	(0, 0.866, 0.5)	(0.991, 0.035, 0.07, 0.105)	(0.084, 0.203, 0.976)

(2) 采用球面立体插值法进行机械臂姿态四元数插值:

第一步: 3 个关键点的姿态转化为四元数, 结果如前所述;

第二步: 采用 SQUAD 进行四元数插值时, 要求出关键姿态的辅助四元数。根据式(9), 求得辅助四元数如下: $S_1 = (0.924, 0.383, 0, 0)$, $S_2 = (0.724, -0.108, -0.008, 0.681)$, $S_3 = (0.991, 0.035, 0.07, 0.105)$;

第三步: 再根据式(9), 采用球面立体插值法在 Q_1 与 Q_2 、 Q_2 与 Q_3 姿态之间进行四元数插值;

第四步: 根据公式(10), 采用 Hopf 映射, 把四元数插值点转化为三维球面上的三维向量;

第五步: 在三维球面上绘制四元数插值曲线, 根据插值曲线的平滑性判断四元数插值是否平滑。

SQUAD 四元数插值及 Hopf 映射如表 2 所示。

(3) 结果分析:

本算例采用 SLERP 法和 SQUAD 法得到的四元数插值点, 经过 Hopf 映射可以转化成各自的三维矢量, 因此可以在三维空间绘制 SLERP 法和 SQUAD 法的四元数插值曲线, 如图 2 所示。

表 2 SQUAD 四元数插值及 Hopf 映射(部分)

序号	变量 h	第一段四元数插值及 Hopf 映射		第二段四元数插值及 Hopf 映射	
		四元数插值点(部分)	映射到三维球面	四元数插值点(部分)	映射到三维球面
		(q_0, q_1, q_2, q_3)	(X, Y, Z)	(q_0, q_1, q_2, q_3)	(X, Y, Z)
1	0	(0.924,0.383,0,0)	(0.707,0,0.707)	(0.866,0,0,0.5)	(0,0.866,0.5)
2	0.1	(0.934,0.348,0,0.058)	(0.651,0.109,0.752)	(0.868,-0.014,0.006,0.496)	(-0.019,0.861,0.508)
3	0.2	(0.943,0.309,0,0.122)	(0.582,0.231,0.780)	(0.878,-0.021,0.012,0.478)	(-0.026,0.840,0.542)
4	0.5	(0.930,0.177,-0.002,0.321)	(0.328,0.598,0.731)	(0.931,-0.011,0.034,0.363)	(0.005,0.677,0.736)
5	0.8	(0.884,0.055,0,0.464)	(0.096,0.821,0.563)	(0.978,0.021,0.056,0.202)	(0.064,0.393,0.918)
6	1	(0.866,0,0,0.5)	(0,0.866,0.5)	(0.991,0.035,0.07,0.105)	(0.084,0.203,0.976)

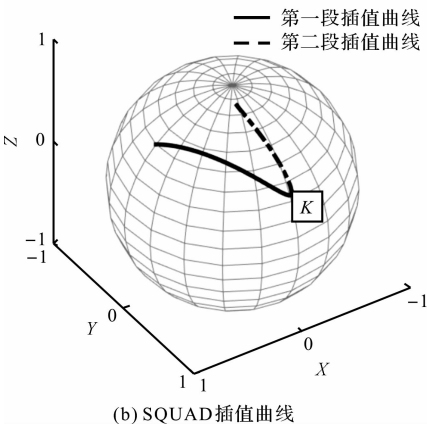
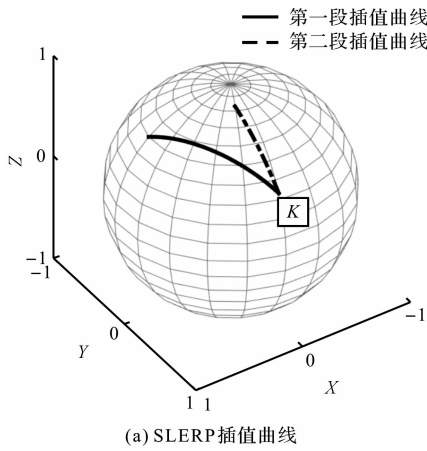


图 2 四元数插值曲线

从图 2 可以看出:(1)SLERP 方法得到的两段插值曲线,各段曲线都是平滑的曲线,但在两段插值曲线的连接点 K 处有明显尖锐点的出现,说明整个插值曲线是不平滑的,因此 SLERP 不适合用于两个以上的姿态插值;(2)SQUAD 方法得到的两段插值曲线,每段曲线都是平滑曲线,并且两段插值曲线的连接点 K 处是平滑过渡的。因此,相对于 SLERP 法,SQUAD 法更适合用于两个以上的多姿态四元数插值。

下面使用相应的插值角速度曲线图来验证上述结论的正确性。姿态规划插值角速度曲线如图 3 所示。

由图 3 可以看出:(1)图 3(a)的角速度曲线是不连续的,在 ω_k 点处与 ω'_k 点处不重合,有明显的间断

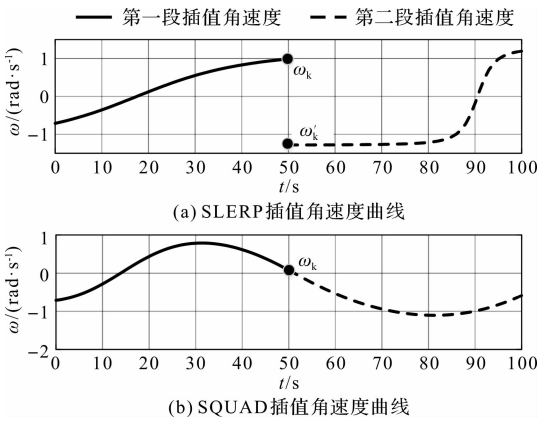


图 3 姿态规划插值角速度曲线

点,说明 SLERP 法运用于两个以上姿态的插值是不平滑的;(2)用 SQUAD 插值方法得到的角速度曲线是连续的,没有出现间断点或尖点。这也说明 SQUAD 比 SLERP 更适合用于两个以上的多姿态插值。

4 结束语

对比常用机械臂姿态四元数路径规划方法的基础上,笔者提出了 Hopf 映射绘制四元数插值曲线的方法,并通过算例对 Hopf 映射在机械臂姿态四元数规划中的可行性与正确性进行了验证,得到结果如下:

(1)Hopf 映射绘制四元数插值曲线的方法避免了复杂四元数插值函数的求导过程,能够判断四元数插值是否平滑,操作简便、实用;

(2)SQUAD 插值方法比 SLERP 更适合于两个以上的多姿态插值。

参考文献(References):

[1] 孙 斌,常晓明,段晋军. 基于四元数的机械臂平滑姿态规划与仿真[J]. 机械科学与技术,2015,34(1):56-59.
[2] 张长利,张伶俐,王树文,等. 基于传感器校正与融合农用旋翼无人机姿态解算[J]. 东北农业大学学报,2015,46(11):70-76.
[3] 刘松国,朱世强,王宣银. 基于四元数和 B 样条的机械手

- 平滑姿态规划器[J]. 浙江大学学报:工学版,2009,43(7):1192-1196.
- [4] 李宏胜,汪允鹤,黄家才,等. 工业机器人倍四元数轨迹规划算法的研究[J]. 中国机械工程,2016,27(20):2711-2716.
- [5] 谢文雅. 基于四元数的工业机器人姿态规划与插补算法的研究[D]. 武汉:华中科技大学机械科学与工程学院,2017.
- [6] 樊文. 基于多项式插值样条单位四元数曲线的构造及其应用[D]. 合肥:合肥工业大学数学学院,2016.
- [7] 张思进,杜伟霞,殷珊. 振动筛系统双 Hopf 分岔的反控制[J]. 湖南大学学报:自然科学版,2017,44(10):55-61.
- [8] 乐源,谢建华,丁旺才. 一类两自由度碰撞振动系统的 Hopf 分岔和混沌[J]. 动力学与控制学报,2004,2(3):36-41.
- [9] SHOEMAKE K. Animating rotation with quaternion curves[C]. Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. New York: Association for Computing Machinery,1985.
- [10] DAM E B, KOCH M, LILLHOLM M. Quaternions, interpolation and animation[M]. Copenhagen: København Universitet Press, 1998.
- [11] 胡婧. 广义 Hopf 映射在构造可积 Hamilton 系统中的应用[D]. 郑州:郑州大学数学与统计学院,2015.
- [12] 李秋萍,章军,崔军. 一种欠驱动柔性机械手的抓取力研究[J]. 轻工机械,2018,36(3):21-24.
- [13] 季晨. 工业机器人姿态规划及轨迹优化研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学机电工程学院,2013.

[编辑:冯黎雅]

本文引用格式:

普亚松,张文斌,蔺小军,等. Hopf 映射在机械臂四元数姿态规划中的应用研究[J]. 机电工程,2020,37(11):1387-1392.

PU Ya-song, ZHANG Wen-bin, LIN Xiao-jun, et al. Application of Hopf mapping in quaternion orientation planning of manipulator[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2020,37(11):1387-1392.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>

(上接第 1379 页)

- [3] KIM K, CHEN Z B, ZHANG Y, etc. A Novel Shear Mode MR Damper and Its Mechanical Performance[J]. **Journal of Harbin Institute of Technology**, 2017, 24(3):31-38.
- [4] SHI J H, SONG Q H, LIU Z Q, etc. Partial Surface Damper to Suppress Vibration for Thin Walled Plate Milling[J]. **Chinese Journal of Mechanical Engineering**, 2017, 30(3):632-643.
- [5] 王琳,周盼,夏孟龙. 基于 AMESim 的船用液压阻尼器结构优化与仿真[J]. 液压与气动,2018(6):94-98.
- [6] 陆勇星,韩玉怀. 双簧液压阻尼器结构的动态减振特性研究[J]. 机械设计,2017,29(8):23-26.
- [7] 郑恣,程相,左哲清,等. 液体弹性模量对减摆器阻尼特性影响的研究[J]. 液压与气动,2019(9):123-126.
- [8] 王春光,刘晓薇,刘展麟,等. 某高速开关阀阀芯液压力影响因素研究[J]. 机床与液压,2018,46(13):50-54.
- [9] 陈晓. 基于 AMESim 的 M4 系列负载敏感比例多路阀动态特性的研究[J]. 机床与液压,2019,47(17):192-197.
- [10] 司昌练. 基于电液位置伺服系统机床滑台模糊自适应控制研究[J]. 液压气动与密封,2019(5):37-42.
- [11] 吴万荣,秦伟业,梁向京,等. 大惯性负载液压系统启动冲击成因及控制[J]. 噪声与振动控制,2015,35(4):233-236.
- [12] 邢坤,程武山. 多功能智能轮椅背部支起机构优化设计[J]. 轻工机械,2019,37(5):94-98.

[编辑:冯黎雅]