

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2020.11.022

基于 PCHIP 与 G^1 连续的离散点 曲线重构方法研究*

刘 宇, 朱志松*, 赵 旭, 张子立
(南通大学 机械工程学院, 江苏 南通 226019)

摘要: 为了更加充分地使用现有海绵切割数控系统中的圆弧插补功能, 保证加工曲线的顺滑性, 提出了双圆弧逼近分段三次 Hermite 插值多项式 (PCHIP) 拟合的样条曲线的重构方法。使用 PCHIP 拟合的海绵加工坐标文件中符合要求样条区间的离散点, 建立了基于最小误差的双圆弧几何模型与误差模型, 基于设计余量等分与整体递增分割逼近方案, 借助 Python 数据处理模块, 获得了组成样条曲线的圆弧, 最后对两种方案的圆弧段数与逼近误差进行了对比。研究结果表明: 重构的曲线最大程度地还原了设计曲线; 在设定的误差范围之内, 曲线分段较少, 圆弧间光滑连接, 可实现平稳加工。

关键词: 分段三次 Hermite 插值多项式; 双圆弧; 海绵切割; 离散点重构

中图分类号: TP273; TG659

文献标识码: A

文章编号: 1001-4551(2020)11-1380-07

Discrete point curve reconstruction method based on PCHIP and G^1 continuous

LIU Yu, ZHU Zhi-song, ZHAO Xu, ZHANG Zi-li

(School of Mechanical Engineering, Nantong University, Nantong 226019, China)

Abstract: In order to made full use of the circular interpolation function in the existing sponge cutting CNC system, and ensured the smoothness of the processing curve, a method of approximating the spline curve fitted by piecewise cubic Hermite interpolation polynomial (PCHIP) with biarc was proposed. The discrete points in the spline interval that met the requirements in the sponge processing coordinate file were fitted by PCHIP fitting, the biarc geometric model and error model based on the minimum error were established. Approximation schemes of margin equalization and global incremental segmentation were designed. With the help of the Python data processing module, the arc of the composed spline curve was obtained, and the numbers of arc segments and approximating error between the two schemes were compared. The results indicate that the reconstructed curve restores the design curve to the greatest extent. Within the set error range, the curve has fewer segments and the arcs are smoothly connected, which can realize stable machining.

Key words: piecewise cubic Hermite interpolation polynomial (PCHIP); biarc; sponge cutting; discrete point reconstruction

0 引 言

数控海绵切割机床的切割轨迹一般由圆弧、直线或样条曲线组成。现有的数控系统只提供直线插补与圆弧插补^[1]。加工坐标文件设计过程中可借助 CAD

参数化功能, 使用圆弧拟合图纸中的样条曲线^[2]。实际生产中往往采用已有加工坐标文件, 这类坐标文件中样条曲线以离散点的形式存在, 且分布不均, 一般采用折线连接, 只能满足 G^0 连续^[3], 刀具在每一个插补段都需经过加速、匀速、减速和停顿 4 个阶段, 加工质

收稿日期: 2020-03-16

基金项目: 江苏高校优势学科建设工程资助项目 (苏财教[2018]192 号)

作者简介: 刘宇 (1995-), 男, 江苏徐州人, 硕士研究生, 主要从事机电一体化方面的研究。E-mail: 1635657121@qq.com

通信联系人: 朱志松, 男, 高级实验师, 硕士生导师。E-mail: zhu.zhs@ntu.edu.cn

量差、机床冲击大、效率低^[4]。

为了能够直接利用数控机床的圆弧插补功能,使组成样条曲线的曲线段在连接处满足 G^1 连续(两条曲线在交点处法线相同,切线夹角为零),国内研究者一般采用双圆弧逼近 B 样条曲线来重构曲线^[5-6],但针对离散点坐标的双圆弧逼近研究较少。而且 B 样条拟合的曲线除首尾两个控制点,其余各点都不在曲线上。对于海绵切割加工,拟合的曲线必须通过每个离散点,使曲线保持原有的形状特性。分段三次 Hermite 插值多项式^[7-8](PCHIP)拟合着重于保形和单调,曲线通过每个离散点。

因此,笔者对样条曲线区间选择、双圆弧弦切角计算、基于误差分析的逼近算法进行研究,并详细阐述其实现方法。

1 整体方案设计

花型文件经过排版和直线拟合可导出海绵加工坐标文件(HMD)。与 DXF 文件相比,HMD 文件在生成时就确定了加工的起点、终点以及加工路径,不可更改,其中每段曲线都具有方向性。HMD 文件中直线坐标与圆弧坐标的格式是统一的,共有 3 列数据。HMD 文件格式如表 1 所示。

表 1 HMD 文件格式

x	y	z
1 078.019 610	505.000 000	0.000 000 000 0
850.000 000	505.000 000	0.473 284 817 7
800.970 960	445.194 193	0.000 000 000 0
830.970 966	295.194 193	0.357 510 765 0

表 1 中,第 1 列是横坐标值,第 2 列是纵坐标值,第 3 列是角度(凸度)信息(圆弧圆周角一半的正切值)。第 3 列的值是判断圆弧或是直线的依据,若第 3 列的值为零,此段曲线为直线;否则,此段曲线为圆弧。HMD 文件是以短折线表达样条曲线,每段曲线中包含的点离散且密集。这些点拟合为连续曲线作为后期双圆弧逼近的基础。

笔者拟在 PCHIP 拟合列表离散曲线的基础上,设计双圆弧逼近该样条曲线。首先,对表示 HMD 文件中曲线信息的折线始终点坐标,使用 SciPy^[9] 中 Interpolate 模块下的 PchipInterpolator 函数实现样条拟合。

针对全部离散点选择样条曲线区间,笔者提取 HMD 文件中的内容到列表,得到列表长度 $leng$,方向标记位 $flag_c$ (每段折线终点与起点 x 坐标的差值),趋势标记位 $flag$ (当前折线与前一折线方向标记位的积)。两点间距离小于 l 、两段折线间角度小于 ρ 、折线段数大于 k 的点为原曲线的直线逼近点,作为拟合的

样本点。横坐标沿 x 轴递增的点纳入正向列表 Z_{xy} ,否则纳入反向列表 B_{xy} 。

设 $i = 1, \dots, leng - 1$,取相邻的 3 个点 (x_{i-1}, y_{i-1}) 、 (x_i, y_i) 、 (x_{i+1}, y_{i+1}) ,凸度分别为 z_{i-1} 、 z_i 、 z_{i+1} 。相邻两条折线的长度为:

$$\begin{cases} l_1 = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ l_2 = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \end{cases} \quad (1)$$

式中: l_1 —前一折线的长度; l_2 —当前折线的长度。

相邻两条折线的夹角为:

$$angle = \arccos\left(\frac{(x_i - x_{i-1}) \times (x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_{i-1}) \times (y_{i+1} - y_i)}{l_1 \times l_2}\right) \quad (2)$$

式中: $angle$ —相邻两条折线的夹角。

系统方案流程如图 1 所示。

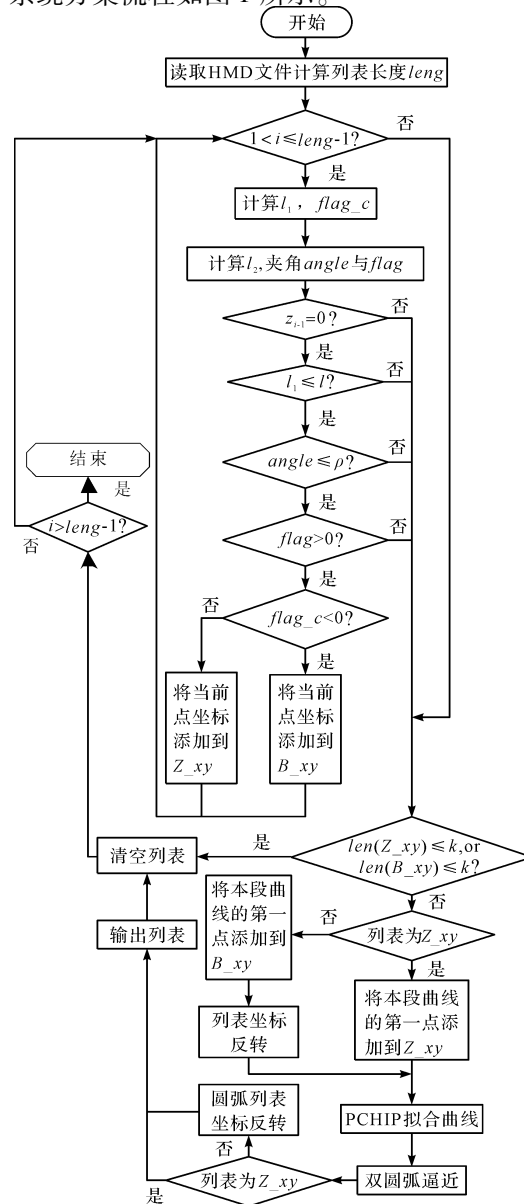


图 1 系统方案流程

式中: φ —起点的弦切角。

角 γ 的取值与 φ, ω 乘积的符号相关,若乘积大于零,则拟合为 C 型双圆弧;若是乘积小于零,则拟合 S 型双圆弧^[10]。表达式为:

$$\begin{cases} \gamma = \varphi & \varphi \times \omega > 0 \\ \gamma = (3\varphi - \omega)/2 & \varphi \times \omega < 0 \end{cases} \quad (12)$$

式中: φ —起点的弦切角; ω —终点的弦切角。

2.2 双圆弧误差计算

根据双圆弧算法计算出圆弧的圆心 $O_s(x_{O_s}, y_{O_s})$ 、 $O_t(x_{O_t}, y_{O_t})$ 以及圆弧半径 R_s 与 R_t , 在每段双圆弧对应的 PCHIP 拟合曲线上取 $t-1$ 个点, 坐标 $P_j(x_j, y_j)$ 为:

$$P_j(x_j, y_j) = (x_s + j \times \sigma, f(x_s + j \times \sigma)), \quad j = 1, 2, \dots, t-1 \quad (13)$$

式中: σ —分段步长。

$$\sigma = (x_t - x_s)/t \quad (14)$$

式中: t —分段数。

误差原理如图 3 所示。

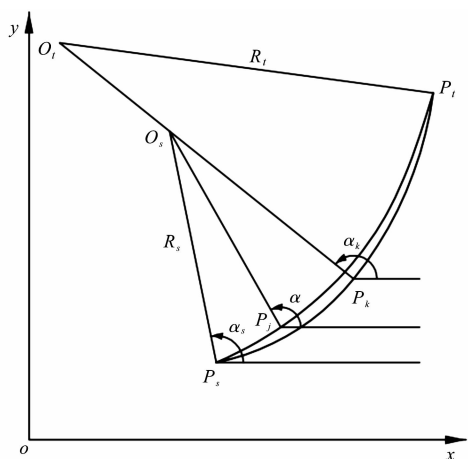


图 3 误差原理

根据图 3 可知:由 α 角范围得到的双圆弧误差计算公式^[11] 为:

$$\delta = \begin{cases} \left| \sqrt{(x_j - x_{O_s})^2 + (y_j - y_{O_s})^2} - R_s \right| & \alpha \in (\alpha_s, \alpha_k) \\ \left| \sqrt{(x_j - x_{O_t})^2 + (y_j - y_{O_t})^2} - R_t \right| & \alpha \notin (\alpha_s, \alpha_k) \end{cases} \quad (15)$$

式中: δ —双圆弧误差值; α — P_j 与圆心连线 and x 轴正向的夹角; α_s — P_s 与 O_s 连线和 x 轴正向的夹角; α_k — P_k 与 O_s 连线和 x 轴正向的夹角。

3 双圆弧逼近

根据双圆弧算法原理与误差原理设计逼近方法,

由式 (16) 计算步长, 设当前段曲线的起始点为 $P_s(x_{start}, f(x_{start}))$, 终止点为 $P_t(x_{start} + step, f(x_{start} + step))$ 。实验中采用两种圆弧逼近方法, 分别为余量等分法、整体递增分割法, 在一些论文中也有折中分段法^[12]。

余量等分法: 设 $f(x)$ 为 PCHIP 拟合曲线, 余量等分法逼近流程如图 4 所示。

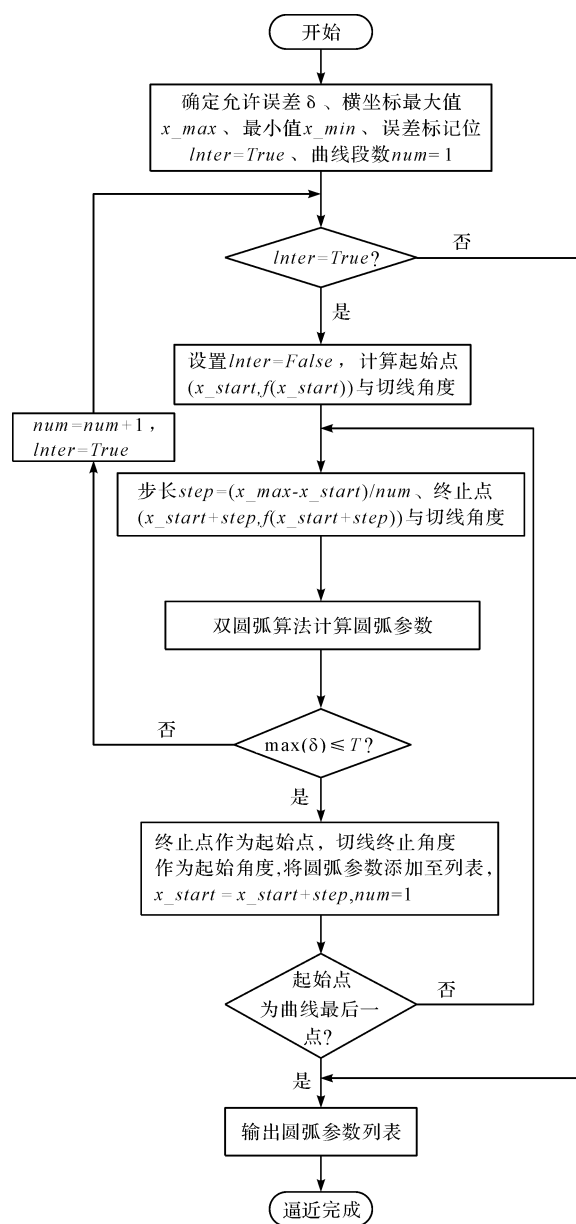


图 4 余量等分法逼近流程

由图 4 可知: 根据逼近步长、当前逼近曲线段的起始点与终止点坐标、两点的弦切角, 由公式 (4) 计算圆弧半径, 再根据公式 (5) 得到圆心与公切点坐标, 可得到当前逼近曲线段的双圆弧。由公式 (15) 计算曲线中间的若干个点的法向误差。给定误差为 T , 最大的法向误差 $\max(\delta) > T$, 则 $num = num + 1$, 重

新计算步长,并将重新取点之后的第2个点作为逼近这一段曲线的终点,直到误差值小于给定误差;若最大法向误差 $\max(\delta) \leq T$,将完成逼近段的曲线终点坐标与切线角度作为逼近下一段曲线的起点坐标与切线角度(每段双圆弧在连接处满足 G^1 连续),输出逼近的圆弧参数,在逼近完成之后,重置 $num = 1$,开始逼近余下曲线。

步长计算公式为:

$$step = (x_{max} - x_{start})/num \quad (16)$$

式中: x_{max} —拟合之后 x 值列表的最大值; x_{start} —逼近每段曲线的起始点横坐标; num —曲线分段数(初始值为1)。

整体递增分割法与余量等分法相似,区别在于步长与分段数的取值,不重置 num 的值,步长计算利用曲线的整体长度,步长累加超过整体曲线终点 x 坐标时,取整体曲线终点为待计算曲线终点。

其步长计算公式为:

$$step = (x_{max} - x_{min})/num \quad (17)$$

式中: x_{max} —拟合后 x 值列表的最大值; x_{min} —拟合后 x 值列表的最小值; num —曲线分段数(初始值为1)。

折中分段法在逼近过程中,取曲线中点分割曲线,若是不满足误差要求,则将分割出的前一段曲线再次取中点分割,这将会增加分割密度,得到更多的圆弧,故实验不采用该方法。

4 实际应用

4.1 拟合曲线的误差分析

设加工的曲线方程为 $y = \sin x + 1, x \in [0, 2\pi]$,转换为 HMD 格式,由 60 段折线组成,并在定义域内取 n 个点,以拟合曲线与原曲线纵坐标的差的绝对值为拟合误差 μ 。PCHIP 拟合如图 5 所示。

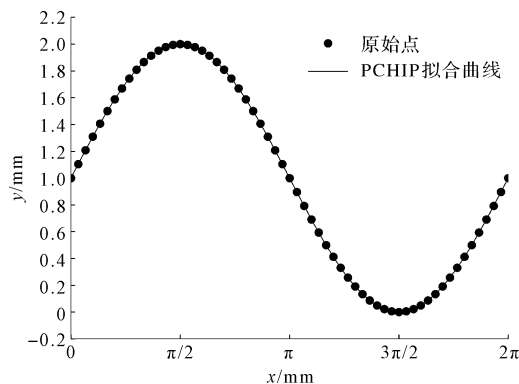


图 5 PCHIP 拟合

PCHIP 拟合误差如图 6 所示。

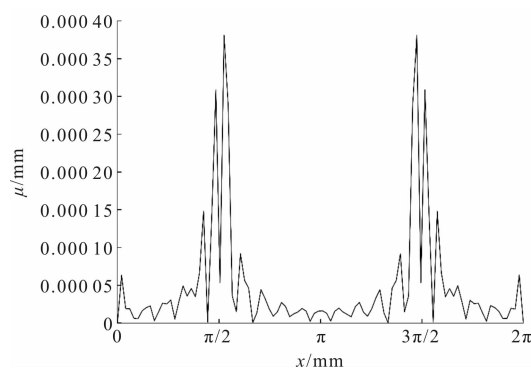


图 6 PCHIP 拟合误差

由图 6 可知:拟合列表点的误差较小,大多分布在 $0 \sim 0.0001$ mm 之间,而且平均误差较小,海绵切割尺寸误差一般要求低于 0.5 mm,因此可满足加工精度要求。

PCHIP 拟合误差值如表 2 所示。

表 2 PCHIP 拟合误差值

误差参数	值
平均值/mm	0.000 047 705
方差/mm ²	0.000 000 006
标准差/mm	0.000 077 449
最大值/mm	0.000 380 856
最小值/mm	0.000 000 000
极差/mm	0.000 380 856

4.2 逼近比较

两种方法在不同给定误差的圆弧段数如表 3 所示。

表 3 两种方法在不同给定误差的圆弧段数

T/mm	余量等分法	整体递增分割法
0.1	6	6
0.01	14	14
0.001	26	32
0.000 1	78	174

由表 3 可知:在 $T \leq 0.0001$ mm 时,整体递增分割法得到的圆弧段数急剧增加,多于余量等分法得到的圆弧段数。

不同给定误差对应双圆弧逼近曲线如图 7 所示。

4.3 逼近圆弧与原始曲线的误差分析

不同给定误差对应逼近误差如图 8 所示。

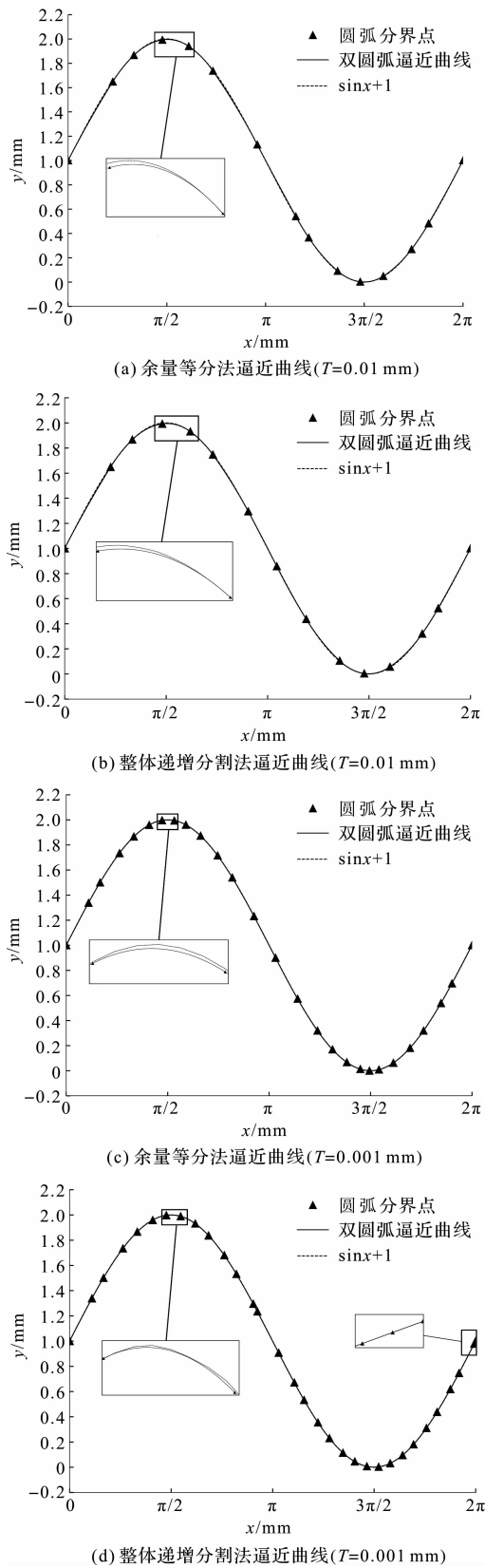


图 7 不同给定误差对应双圆弧逼近曲线

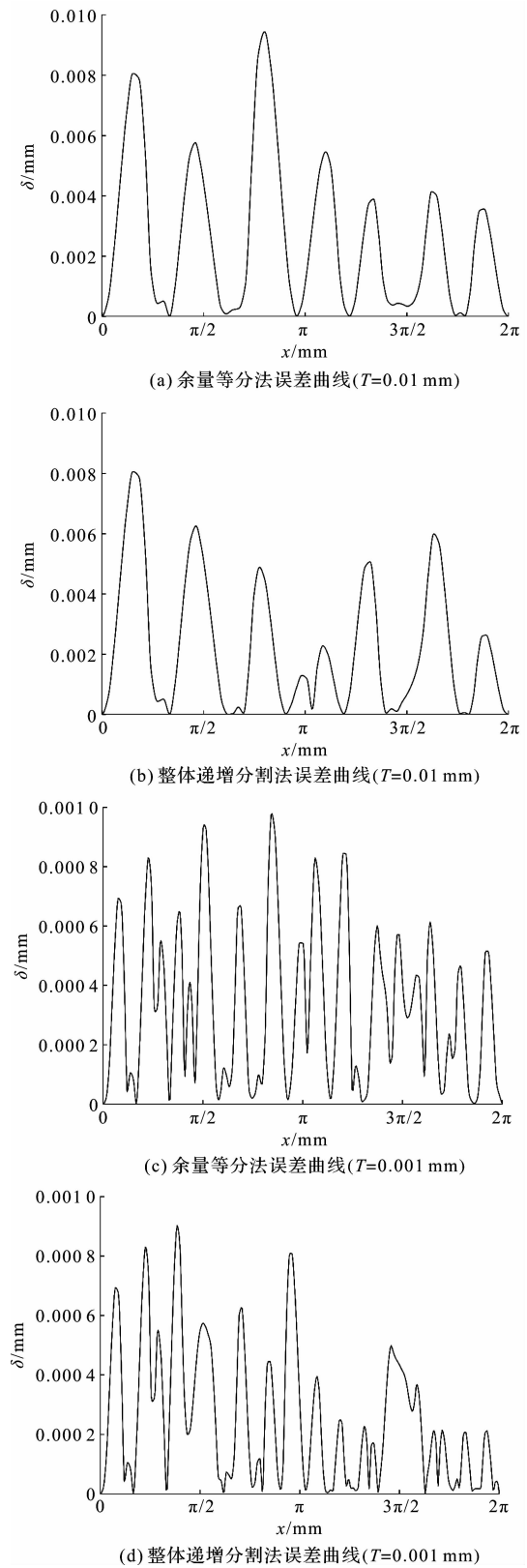


图 8 不同给定误差对应逼近误差

由图 8 可知:(1)两种方案的误差都在给定误差范围以内,达到重构曲线的精度要求;(2)第二种方案比第一种方案的误差分布相对集中,但是随着允许误差范围的缩小,第二种方案圆弧段数急剧增加,效率降低;(3)整体递增分割法的误差值小于余量等分法,获得的圆弧精度更高,但在给定精度下,余量等分法可获得更少的段数,需在实际生产中合理选择。

余量等分法误差值如表 4 所示。

表 4 余量等分法误差值

误差参数	数值	
	$T=0.01\text{ mm}$	$T=0.001\text{ mm}$
平均值/mm	0.002 511 67	0.000 339 28
方差/ mm^2	0.000 005 80	0.000 000 07
标准差/mm	0.002 424 28	0.000 259 02
最大值/mm	0.009 443 52	0.000 981 11
最小值/mm	0.000 000 00	0.000 000 00
极差/mm	0.009 443 52	0.000 981 11

整体递增分割法误差值如表 5 所示。

表 5 整体递增分割法误差值

误差参数	数值	
	$T=0.01\text{ mm}$	$T=0.001\text{ mm}$
平均值/mm	0.002 164 23	0.000 232 97
方差/ mm^2	0.000 004 58	0.000 000 05
标准差/mm	0.002 153 24	0.000 224 39
最大值/mm	0.008 060 13	0.000 903 28
最小值/mm	0.000 000 00	0.000 000 00
极差/mm	0.008 060 13	0.000 903 28

5 结束语

笔者提出了基于离散加工点的样条曲线重构方法,PCHIP 拟合保证了在拟合连接点处导数的连续性,贴合原始形状,采用基于误差最小原则的双圆弧逼近方法,可根据给定重构精度,合理分配圆弧分段;利用 Python 编写了相关程序,验证了该算法的可行性。

实验结果表明:余量等分法与整体递增分割法都可有效地减少曲线的分段数;实验曲线由 60 段折线组

成,在海绵切割尺寸误差内,相对于原曲线,经过这两种逼近方法得到的圆弧段数可减少 50% 以上的分段数,且在圆弧连接处的切线相同,满足了 G^1 连续,最大限度还原了设计曲线的光滑度。

参考文献 (References):

- [1] 王霞琴,张伟华,王发生. 基于 MATLAB 的优化双圆弧插补高次曲线的算法[J]. 机械研究与应用,2018,31(3): 166-168.
- [2] 叶勤文,王维杰,陈 咪,等. 基于 AutoCAD 以及圆弧拟合曲线的参数化服装制版[J]. 毛纺科技,2019,47(9): 57-65.
- [3] 钱一晨,陈虎娣. 列表点双圆弧样条曲线拟合算法[J]. 机械研究与应用,2012,25(3): 19-22,26.
- [4] 张 弛,陈锦昌,申艺杰. 基于 VB 的优化双圆弧拟合误差分析及其算法改进[J]. 图学学报,2014,35(1): 1-5.
- [5] 赵福英,倪俊芳. 花型样条曲线加工代码生成算法[J]. 纺织学报,2018,39(7): 153-158.
- [6] 冯兴辉,张 旭,金 龙,等. 基于 G^1 连续的双圆弧与 B 样条分段点区间确定及重构方法[J]. 轻工机械,2016,34(2): 30-33.
- [7] 李琳俊,王希云. 求解不定信赖域子问题的分段三次 Hermite 插值法[J]. 太原科技大学学报,2018,39(2): 141-144.
- [8] 宋喜佳,冯学妮,郝亚茹,等. 基于分段三次 Hermite 插值的光源相关色温及色偏差的快速计算[J]. 照明工程学报,2019,30(2): 44-49,102.
- [9] SciPy community. SciPy 1.3.3 Reference Guide[EB/OL]. [2019-11-23]. <http://docs.scipy.org/doc/scipy-1.3.3/scipy-ref-1.3.3.pdf>.
- [10] 虞铭财,杨勋年,汪国昭. 整体最优双圆弧拟合[J]. 高校应用数学学报 A 辑(中文版),2004(2): 225-232.
- [11] 郭文兰,张 彤. 曲线方程的双圆弧拟合算法及实现[J]. 哈尔滨理工大学学报,2004(6): 87-89.
- [12] 刘吉安,张 平. 非圆曲线的双圆弧拟合及数控加工的程序编制[J]. 机电工程技术,2009,38(6): 44-46,91,162.

[编辑:冯黎雅]

本文引用格式:

刘 宇,朱志松,赵 旭,等. 基于 PCHIP 与 G^1 连续的离散点曲线重构方法研究[J]. 机电工程,2020,37(11): 1380-1386.

LIU Yu, ZHU Zhi-song, ZHAO Xu, et al. Discrete point curve reconstruction method based on PCHIP and G^1 continuous[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2020,37(11): 1380-1386.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>