

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2020.09.021

基于变密度法的多材料与 结构一体拓扑优化研究*

董 莉, 吴晓明*

(厦门大学 机电工程系, 福建 厦门 361102)

摘要:针对多材料连续体结构拓扑优化问题, 基于 3D 打印技术的发展, 将材料可由多种不同材料按任意比例混合组成的技术应用于多材料拓扑优化问题中。在变密度法结构拓扑优化方法基础上, 提出了一种双材料混合结构拓扑优化模型及其计算方法; 在该模型中以单元密度作为设计变量, 同时增加单元中两种材料混合比例为设计变量; 最后通过两个算例对所提出方法的有效性进行了验证。研究表明: 采用该方法进行结构拓扑优化的同时, 可以得到两种材料的混合比例, 实现基于各向同性固体材料插值模型 (SIMP) 的多材料与结构一体拓扑优化。

关键词:一体优化; 拓扑优化; 多材料; 各向同性固体材料插值模型; 变密度法

中图分类号: TH122; TP391

文献标识码: A

文章编号: 1001-4551(2020)09-1109-06

Integrated topology optimization of materials and structures based on variable density method

DONG Li, WU Xiao-ming

(Department of Electrical & Mechanical Engineering, Xiamen University, Xiamen 361102, China)

Abstract: Aiming at topology optimization of multi-material continuum structures, based on the development of 3D printing technology, the technology of material made up of a variety of different materials mixed in any proportion was investigated. Based on the topological optimization method of variable density method, a topological optimization model and its calculation method for two-material hybrid structure was proposed. In this model, the elements densities were used as the design variables, and the mixing ratios of two materials in the elements were added as the design variables. The developed method was verified by two examples. The results indicate that this method can optimize the structure topology and obtain the mixture ratios of two materials, so as to realize the material and structure integrated topology optimization based on the interpolation model for solid isotropic material with penalization.

Key words: integrated optimization; topology optimization; multi-materials; solid isotropic material with penalization (SIMP); variable density method

0 引 言

结构拓扑优化是一种结构概念设计方法, 它可以在给定约束条件的情况下, 根据优化目标, 通过优化算

法计算得到结构的材料最优布局。拓扑优化也是一种非常有效的结构减重优化方法, 它可以得到比传统的形状优化和尺寸优化更轻的结构, 因此成为工程界研究热点。

收稿日期: 2019-12-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51575463)

作者简介: 董莉 (1994-), 女, 湖北大冶人, 硕士研究生, 主要从事连续体结构拓扑优化方面的研究。E-mail: dongli@stu.xmu.edu.cn

通信联系人: 吴晓明, 男, 副教授, 硕士生导师。E-mail: xmwuxm@xmu.edu.cn

自从 1988 年 BENDSØE 等^[1]提出了求解连续体结构拓扑优化的均匀化方法以来,针对拓扑优化的问题得到了广泛的研究。依据描述方式的不同,目前常见的拓扑优化方法包括均匀化方法、变密度法^[2-3]、渐进结构优化方法^[4],以及水平集方法^[5]等。其中,变密度法是以单元密度作为设计变量,具有概念简单、设计变量少、收敛速度快、程序实现简单的优点。

较为成熟的研究大多是单一材料结构拓扑优化,然而单一材料结构在工程实际中通常难以满足一些需要特定综合性能的工程结构问题,因此进行多材料的结构设计研究非常必要,梯度材料以及在梯度材料上的结构设计优化受到工程界广泛关注。

多材料结构拓扑优化的研究始于 THOMSEN^[6],之后一些学者用多种不同性能的材料和空洞进行了多相材料拓扑优化设计。SIGMUND 和 TORQUATO^[7-8]针对两相实体材料和空洞组成的柔性机构拓扑,以及具有极端热膨胀特性的微结构拓扑优化进行了研究;YIN 等^[9]用单个变量描述了多相材料条件下的材料属性,提出了峰值函数多相材料插值模型;GAO 等^[10]采用线性对等混合材料插值模型,进行了多相材料结构拓扑优化设计;ZUO 等^[11]采用序列幂函数插值模型进行了多相材料连续体结构拓扑优化。

另外有一些学者对功能梯度材料的拓扑优化进行了研究。陆丹和刘毅^[12]采用双向渐进拓扑优化(BESO)方法,引入了许用应力,以实际应力与许用应力之比作为单元增删的标准,结合梯度单元法实现了对功能梯度材料的拓扑优化;XIA 和 WANG^[13]基于水平集方法,以体分比和结构边界为设计变量,实现了功能梯度结构材料性能和拓扑布局的并行优化设计;邱克鹏和张卫红^[14]采用了凸规划求解策略以及周长控制方法,实现了功能梯度 MBB 梁和功能梯度夹层结构中夹芯的拓扑构型设计拓扑优化。

这一类研究是在给定的功能梯度材料之上进行的结构设计,而结构需要依据材料的状况而定。现代 3D 打印的多材料融合技术可以让两种甚至多种材料按照需求,以任意的配比进行融合,且材料可以依据结构的功能要求而变化,从而打破了结构对材料的局限。因此,研究多材料与结构一体设计优化方法具有重要意义。

基于变密度法,笔者提出一种双材料与结构一体拓扑优化模型。

1 材料与结构一体优化模型

1.1 变密度法拓扑优化模型

变密度法将材料密度值设置为在区间 $[0,1]$ 之间连续变化的变量,其中,密度值为 0 时表示单元材料不存在,密度值为 1 时表示单元材料存在。

假设材料密度与材料弹性模量之间的关系如下:

$$E(x_i) = E_{\min} + x_i(E_0 - E_{\min}) \quad x_i \in [0,1] \quad (1)$$

式中: x_i —第 i 个单元的密度; $E(x_i)$ —第 i 个单元的材料弹性模量; E_0 —材料存在时的弹性模量; $E_{\min}$ —材料不存在时的弹性模量,为防止出现刚度阵奇异而无法求解,可令 $E_{\min} = E_0/1\ 000$ 。

由于在结构中出现的中间密度单元是不存在的,为了解决中间密度值单元,笔者引入惩罚插值函数来解决中间单元问题。SIMP 法是一个幂函数作为惩罚函数,使得所有单元的密度值惩罚到 0 或者 1 附近。

SIMP 法模型的表达式如下:

$$f(x_i) = x_i^p \quad x_i \in [0,1], i = (1,2,\dots,n) \quad (2)$$

式中: p —惩罚因子; n —结构单元总数。

引入 SIMP 插值模型后的材料弹性模量如下:

$$E(x_i) = E_{\min} + x_i^p(E_0 - E_{\min}) = E_{\min} + x_i^p \Delta E \quad (3)$$

引入 SIMP 法插值模型后的结构的刚度矩阵、柔度函数以及敏度函数如下所示:

$$\begin{cases} \mathbf{K} = \sum_{i=1}^n (E_{\min} + x_i^p \Delta E) \mathbf{k}_i \\ C(x) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{i=1}^n (E_{\min} + x_i^p \Delta E) u_i^T \mathbf{k}_i u_i \\ C'(x) = -p \Delta E \sum_{i=1}^n x_i^{p-1} u_i^T \mathbf{k}_i u_i \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{K}$ —整体刚度矩阵; $\mathbf{k}_i$ —单元刚度矩阵; $C(x)$ —结构柔度值; $\mathbf{F}$ —载荷向量; $\mathbf{U}$ —位移向量; $C'(x)$ —结构灵敏度。

以体积约束下柔度最小化(即刚度最大化)建立基于 SIMP 插值模型的变密度法拓扑优化数学模型如下所示:

$$\begin{cases} \text{Find: } \mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \Omega \\ \text{Min: } C(x) = \sum_{i=1}^n (E_{\min} + x_i^p \Delta E) u_i^T \mathbf{k}_i u_i \\ \text{s. t. : } \sum_{i=1}^n x_i v_i - V^* \leq 0 \\ \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ 0 \leq x_{\min} \leq x_i \leq 1 (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (5)$$

式中: Ω —结构初始设计区域; n —离散后的单元总数目; x_i —设计变量,表示离散后每个单元的密度值; u_i —单元位移向量; v_i —每个单元初始体积; V^* —结构总体积约束。

为避免求解时出现总刚度矩阵奇异,取 $x_{\min} = 0.001$, x_i 取 $[x_{\min}, 1]$ 之间的连续值。

1.2 材料与结构一体优化模型

本文提出一种基于变密度法的双材料与结构一体拓扑优化模型。结构的每一个有限元单元可由 A, B 两种材料以任意比例融合而成,材料 A 的弹性模量为 E_a ,材料 B 的弹性模量为 E_b ,设单元 i 中材料 B 的比例为 α_i ,则单元 i 中材料 A 的比例为 $1 - \alpha_i$,则单元 i 的材料为 $B\alpha_i + A(1 - \alpha_i)$ 。

基于 SIMP 插值模型的结构与材料一体弹性模量如下:

$$E(x_i) = E_{\min} + x_i^p (E_0(\alpha_i) - E_{\min}) = E_{\min} + x_i^p ((E_b - E_a)\alpha_i + E_a - E_{\min}) \quad (6)$$

刚度矩阵和柔度函数为:

$$K = \sum_{i=1}^n [E_{\min} + x_i^p ((E_b - E_a)\alpha_i + E_a - E_{\min})] k_i \quad (7)$$

$$C(x) = \sum_{i=1}^n (E_{\min} + x_i^p ((E_b - E_a)\alpha_i + E_a - E_{\min})) u_i^T k_i u_i \quad (8)$$

结构柔度最小化作为目标函数,以结构的体积和材料 B 在总体结构中所占比例作为约束,构建基于 SIMP 法插值模型的结构与材料一体拓扑优化模型如下式所示:

$$\begin{cases} \text{Find: } X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in \Omega \\ \text{Min: } C(x, \alpha) = \sum_{i=1}^n [E_{\min} + x_i^p ((E_b - E_a)\alpha_i + E_a - E_{\min})] u_i^T k_i u_i \\ \text{s. t. : } \sum_{i=1}^n x_i v_i - V^* \leq 0 \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i v_i - \mu \sum_{i=1}^n x_i v_i \leq 0 \\ KU = F \\ 0 \leq x_{\min} \leq x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (9)$$

式中: Ω —结构初始设计区域; x_i —离散后每个单元的密度值; α_i —单元中材料 B 的占有比例; n —结构离散后的单元总数; C —结构柔度; F —外力向量; U —位移; E_a —材料 A 的弹性模量; E_b —材料 B 的弹性模量; K —结构刚度阵; V^* —结构目标体积; μ —拓扑完成结

构中材料 B 总的使用比例。

为了避免计算过程中刚度矩阵奇异,用 $E_{\min}$ 代替 0;取 $E_{\min} = 0.001$, $x_{\min} = 0.001$ 。

2 敏度分析与过滤

2.1 敏度分析

结构的体积对单元密度的灵敏度为:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n x_i v_i}{\partial x_i} = v_i \quad (10)$$

结构的柔度对单元密度的灵敏度为:

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = -p x_i^{p-1} ((E_b - E_a)\alpha_i + E_a - E_{\min}) u_i^T k_i u_i \quad (11)$$

结构的柔度对单元中材料 B 的比例灵敏度为:

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha_i} = - (E_b - E_a) x_i^p u_i^T k_i u_i \quad (12)$$

2.2 过滤技术及优化算法

为避免结果出现棋盘格现象和网格依赖性问题,笔者采用敏度过滤技术,即将目标单元和邻接单元进行加权平均,将得到的敏度值代替原来的值,从而实现过滤。

结构的柔度对单元密度的灵敏度过滤如下:

$$\frac{\partial \widehat{C}}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i \sum_{f=1}^N \widehat{H}_f} \sum_{f=1}^N \widehat{H}_f x_f \frac{\partial C}{\partial x_f} \quad (13)$$

式中: $\widehat{H}_f$ —加权因子; $\frac{\partial \widehat{C}}{\partial x_i}$ —过滤后的单元灵敏度; x_i —所求单元的密度; x_f —邻接单元密度; N —与单元 i 中心距离小于过滤半径的所有单元的数目。

距离函数 $\widehat{H}_f$ 如下:

$$\widehat{H}_f = r_{\min} - \text{dist}(i, f) \quad (14)$$

式中: $r_{\min}$ —过滤半径; $\text{dist}(i, f)$ —目标单元和邻接单元的中心距。

$\widehat{H}_f$ 是随着和目标单元中心的距离线性减小的。

笔者采用 OC 优化算法求解式(9)优化问题。OC 优化算法推导过程简单、收敛速度快,是常用的优化算法。通过引入拉格朗日乘数因子,构造拉格朗日函数。根据当设计变量取极值时拉格朗日函数应满足 K-T 必要条件,以及拉格朗日函数关于设计变量和乘数因子的驻值条件,可得到设计变量迭代格式(中间推导过程不再赘述):

$$x_i^{\text{new}} = \begin{cases} \max(x_{\min}, x_i - m) & \text{if } x_i B_i^\eta \leq \max(x_{\min}, x_i - m), \\ x_i B_i^\eta & \text{if } \max(x_{\min}, x_i - m) < x_i B_i^\eta < \min(1, x_i + m), \\ \min(1, x_i + m) & \text{if } \min(1, x_i + m) \leq x_i B_i^\eta \end{cases} \quad (15)$$

$$\alpha_i^{\text{new}} = \begin{cases} \max(0.001, \alpha_i - m) & \text{if } \alpha_i D_i^\eta \leq \max(0.001, \alpha_i - m), \\ \alpha_i D_i^\eta & \text{if } \max(x_{\min}, x_i - m) < \alpha_i D_i^\eta < \min(1, \alpha_i + m), \\ \min(1, \alpha_i + m) & \text{if } \min(1, \alpha_i + m) \leq \alpha_i D_i^\eta \end{cases} \quad (16)$$

式中: m —移动限制; η —阻尼系数, 可以在保证收敛稳定性的同时提升迭代效率。

B_i, D_i 如下式:

$$B_i = \frac{-\frac{\partial C}{\partial x_i}}{\lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} + \lambda_2 (\alpha_i v_i - \mu v_i)} \quad (17)$$

$$D_i = \frac{-\frac{\partial C}{\partial \alpha_i}}{\lambda_2 x_i v_i} \quad (18)$$

式中: λ_1, λ_2 —拉格朗日乘子, 可由二分法计算得到。

迭代终止条件为两次迭代之间设计变量差值的绝对值小于等于一个值 $change$, 即定义终止条件为 $\max(|x^{k+1} - x^k|) \leq change$, 其中: k —迭代次数。

基于 OC 法的多材料与结构一体拓扑优化方法流程如图 1 所示。

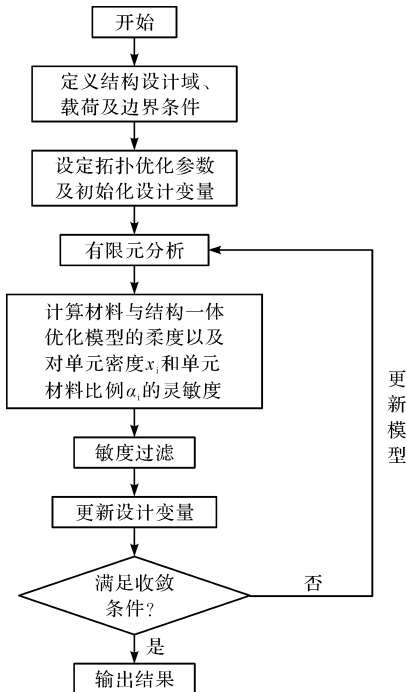


图 1 基于 OC 法的多材料与结构一体拓扑优化方法流程图

3 算例及结果分析

笔者选取两个算例进行数值运算, 验证提出设计方法的有效性。两个算例均使用笔者所提出新的模型

计算, 进行结构与材料一体拓扑优化。

将结构设计区域离散为四节点平面应力单元, 每个单元的相对密度值为 $x_{\min}$ 至 1 之间的连续值, 每个单元由 A、B 两种材料构成; 单元中 B 材料的比例为 α_i , A 材料的比例则为 $1 - \alpha_i$, α_i —0 到 1 之间的连续变量。以每个单元的相对密度 x_i 和单元中材料 B 的比例 α_i 为设计变量, 以体积和拓扑完成结构中材料 B 总的使用比例 μ 为约束, 运用 OC 优化算法进行求解。

3.1 悬臂梁

悬臂梁结构设计域及边界条件如图 2 所示。

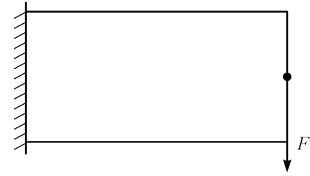
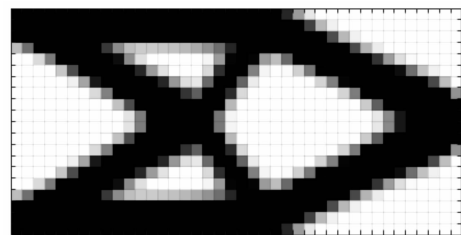


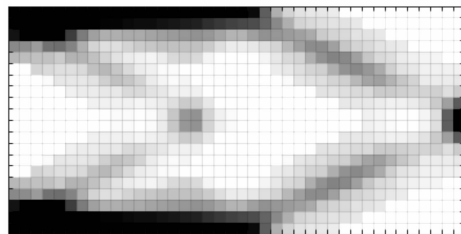
图 2 悬臂梁结构设计域及边界条件

图 2 中, 设计域尺寸为 40×20 , 悬臂梁结构左端固定, 受力作用点集中在右侧中间的一个单元节点上, 初始结构设计域离散成 40×20 个四节点平面应力单元。材料 A 的弹性模量 $E_a = 0.5$, 材料 B 的弹性模量 $E_b = 1$ 。体积分数为 50%, 过滤半径为 1.5, 惩罚因子为 3, μ 为 0.4, 移动限制为 0.2; 阻尼因子为 1/2, 设计变量初始值 x 为 0.5, α 为 0.4。

根据笔者提出结构与材料拓扑优化算法, 得出的悬臂梁优化结果如图 3 所示。



(a) 优化结果拓扑构型



(b) B 材料比例 α 值在拓扑构型上的分布

图 3 悬臂梁优化结果

图 3(a) 为计算所得的拓扑结构形状, 颜色为黑色的单元为保留单元, 白色单元为去掉单元, 灰色单元为密度值处于中间的单元, 该类单元可根据要求保留或删除;

图3(b)为计算所得材料B在拓扑形状基础上每个单元中的比例值 α_i 的示意图,颜色为黑色的单元值 α_i 为1,代表该类单元由B材料构成;颜色为灰色的单元由A、B两种材料按照单元中B材料的比例为 α_i ,A材料的比例为 $1 - \alpha_i$ 混合构成。

在图3(a)中保留单元基础上的图3(b)白色单元值为0,代表此类单元由A材料构成。

迭代终止条件为 $change = 0.001$ 时,计算历时 20.687 825 s,迭代 339 步,柔度值为 82.817 3。

由优化结果可以看出,笔者提出的优化方法所得拓扑结构形状边界清晰、分布合理,整体优化稳定。在材料受力单元附近与结构上下边界受力变形大的部分,都采用了弹性模量较大的B材料,表明得到的材料比例分布也是十分合理的。

3.2 MBB 梁

MBB 梁结构设计域及边界条件如图4所示。

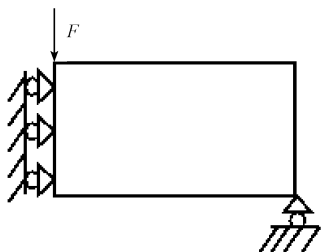


图4 MBB 梁结构设计域及边界条件

图4中,设计域尺寸为 40×20 ,悬臂梁结构左端固定,受力作用点集中在一个单元节点上,初始结构设计域离散成 40×20 个四节点平面应力单元。

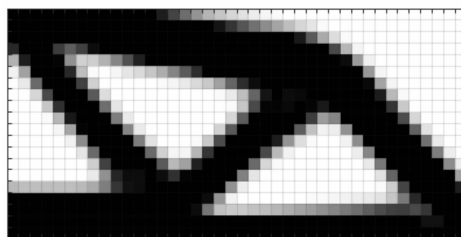
材料A的弹性模 $E_a = 0.5$,材料B的弹性模量 $E_b = 1$;体积分数为 50%,过滤半径为 1.5,惩罚函数为 3, μ 为 0.4,移动限制为 0.2,阻尼因子为 1/2,设计变量初始值 x 为 0.5, α 为 0.4。

根据笔者提出的结构与材料拓扑优化算法,得出的 MBB 梁优化结果如图5所示。

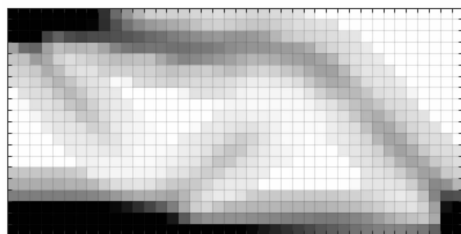
图5(a)为计算所得的拓扑结构形状,黑色的单元为保留单元,白色单元为去掉单元,灰色单元为密度值处于中间的单元,此类单元可根据要求保留或删除;

图5(b)为计算所得在拓扑结构形状的基础上B材料比例值,黑色单元由B材料构成,灰色单元由A、B两种材料按照单元中B材料的比例为 α_i ,A材料的比例为 $1 - \alpha_i$ 混合构成,在图5(a)中保留单元基础上的图5(b)白色单元由A材料构成。

迭代终止条件为 $change = 0.001$ 时,计算历时



(a) 优化结果拓扑构型



(b) B材料比例 α 值在拓扑构型上的分布

图5 MBB 梁优化结果

16.914 929 s,迭代 266 步,柔度值为 93.509 0。

由优化结果可以看出,笔者提出的优化方法所得拓扑结构形状边界清晰、分布合理,整体优化稳定;在材料受力单元附近与结构下边界受力变形大的部分,都采用了弹性模量较大的B材料,表明得到的材料比例分布也是十分合理的。

4 结束语

基于 SIMP 法插值模型,笔者建立了单元中两种材料不同比例与单元弹性模量之间的关系,在变密度法中,以单元密度作为设计变量的基础上,加入材料在单元构成中所占的比例为设计变量,以结构柔度最小化为目标,结构体积和其中一类材料在结构中所占比例为约束,建立了基于变密度法的结构与材料一体拓扑优化方法模型,并采用 OC 优化算法进行了求解。

相关算例及研究表明,该方法可以计算出结构的拓扑构型,同时可得到两种材料比例数值结果;且拓扑构型边界清晰,可以实现结构与材料一体的协同优化。

参考文献(References):

- [1] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(2): 197-224.
- [2] SIGMUND O. Design of material structures using topology optimization [D]. Denmark: Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, 1994.

- [3] BENDSØE M P, SIGMUND O. Material interpolation schemes in topology optimization[J]. **Archive of Applied Mechanics**, 1999, 69(9-10):635-654.
- [4] XIE Y M, STEVEN G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. **Computers & Structures**, 1993, 49(5):885-896.
- [5] SETHIAN J A, WIEGMANN A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods[J]. **Journal of Computational Physics**, 2000, 163(2):489-528.
- [6] THOMSEN J. Topology optimization of structures composed of one or two materials [J]. **Structural Optimization**, 1992, 5(1-2):108-115.
- [7] SIGMUND O, TORQUATO S. Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method[J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1997, 45(6):1037-1067.
- [8] SIGMUND O, TORQUATO S. Design of multiphysics actuators using topology optimization part :two material structures [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2001, 190(49-50):6605-6627.
- [9] YIN L, ANANTHASURESH G K. Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme[J]. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2001, 23(1):49-62.
- [10] GAO T, ZHANG W. A mass constraint formulation for structural topology optimization with multiphase materials [J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2011, 88(8):774-796.
- [11] ZUO W, SAITOU K. Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation [J]. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2017, 55(2):477-491.
- [12] 陆 丹, 刘 毅. 功能梯度材料拓扑优化研究[J]. 科技导报, 2007, 25(7):38-40.
- [13] XIA Q, WANG M Y. Simultaneous optimization of the material properties and the topology of functionally graded structures[J]. **Computer-Aided Design**, 2008, 40(6):660-675.
- [14] 邱克鹏, 张卫红. 功能梯度材料结构拓扑优化设计研究[J]. 西北工业大学学报, 2010, 28(6):851-857.

[编辑:程 浩]

本文引用格式:

董 莉, 吴晓明. 基于变密度法的多材料与结构一体拓扑优化研究[J]. 机电工程, 2020, 37(9):1109-1114.

DONG Li, WU Xiao-ming. Integrated topology optimization of materials and structures based on variable density method[J]. **Journal of Mechanical & Electrical Engineering**, 2020, 37(9):1109-1114.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>