

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2020.07.004

圆弧齿线圆柱齿轮接触应力预测模型研究^{*}

童 钦¹, 张 祺², 梁 君¹, 侯 力^{3*}

(1. 绵阳师范学院 机电工程学院, 四川 绵阳 621000; 2. 攀枝花学院 智能制造学院,
四川 攀枝花 617000; 3. 四川大学 机械工程学院, 四川 成都 610065)

摘要:针对目前圆弧齿线圆柱齿轮尚无显示的接触应力计算理论公式,以分析参数对其接触应力影响的问题,采用 Kriging 代理模型,建立了圆弧齿线圆柱齿轮的设计参数(齿宽、模数、压力角、齿线半径)与圆弧齿线圆柱齿轮接触应力之间的显示数学模型。同时采用鲸鱼优化算法(WOA)对 Kriging 模型变异函数的参数进行了优化,利用优化变异函数参数的 Kriging 代理模型,建立了齿轮设计参数与接触应力之间的显示数学模型,并在 MATLAB 仿真平台中进行了验证。仿真及研究结果表明:改进后算法的精度评价指标得到了提升,预测误差范围由 $[-2, 4]$ 缩小到 $[0, 3]$,模型精度得到了明显的提高;该研究结果能够为其优化设计参数,并为研究各参数对其接触应力影响的显著性分析提供更加精确的数学模型。

关键词:圆弧齿线;圆柱齿轮;接触应力;代理模型;设计参数优化

中图分类号:TH132.41

文献标识码:A

文章编号:1001-4551(2020)07-0751-07

Contact stress prediction model of cylindrical gear with arc tooth

TONG Qin¹, ZHANG Qi², LIANG Jun¹, HOU Li³

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Mianyang Normal University, Mianyang 621000, China;
2. School of Intelligent Manufacturing, Panzhihua College, Panzhihua 617000, China;
3. School of Mechanical Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: Aiming at there is no explicitly theoretical formula for calculating contact stress of cylindrical gear with arc tooth to study the influence of the design parameters of cylindrical gear with arc tooth on its contact stress, the Kriging model based on whale optimization algorithm (WOA) was proposed to establish the explicitly mathematical model of the contact stress between the gear design parameters (tooth width, modulus, pressure angle, tooth line radius) and cylindrical gear with arc tooth. The whale optimization algorithm was applied to optimize the parameters of the variation function of the traditional Kriging model to improve its fitting accuracy, the Kriging model based on the optimized variational function parameters was used to establish the mathematical model of display between gear design parameters and contact stress, the proposed algorithm was realized in the MATLAB platform. The simulation results indicate that the precision evaluation index of the Kriging model based on whale optimization algorithm are improved, the error range is narrowed from $[-2, 4]$ to $[0, 3]$. The accuracy of the optimized Kriging model has been significantly improved, enabling it to optimize its design parameters and study the significance analysis of the impact of each parameter on its contact stress, providing a more accurate mathematical model.

Key words: cylindrical gear with arc tooth; cylindrical gear; contact stress; surrogate model; design parameters optimization

收稿日期:2020-02-13

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51875370, 51375320);四川省科技计划项目(2018JY0420);过程装备与控制工程四川省高校重点实验室开放基金资助项目(GK201905)

作者简介:童钦(1989-),女,四川绵阳人,博士研究生,助教,主要从事机械设计与制造、机械材料方面的研究。E-mail:tongqin518@163.com

通信联系人:侯力,男,博士,教授。E-mail:houlili@163.com

$$-q \cos \alpha \omega_1 \vec{t}_T - [(\pm q \sin \alpha + R_T + \pi m/4) \cos \theta + (R_\varphi + R_T)] \omega_1 \vec{k}_T \quad (7)$$

1.3 啮合函数 Γ

基于啮合原理,啮合函数表示如下:

$$\Gamma = \vec{n} \cdot \vec{v}^{12} = 0 \quad (8)$$

因为 $\omega_1 \neq 0$,由上式可以得出:

$$q = \mp \sin \alpha \frac{\cos \theta (R_T + \pi m/4) + (R_\varphi + R_T)}{\cos \theta} \quad (9)$$

1.4 共轭曲面

将式(9)代入式(1)中,则刀具与被加工齿轮接触线方程为:

$$\begin{cases} x_T = -(\pm q \sin \alpha + R_T \pm \pi m/4) \cos \theta \\ y_T = (\pm q \sin \alpha + R_T \pm \pi m/4) \sin \theta \\ z_T = q \cos \alpha \\ q = \mp \sin \alpha \frac{\cos \theta (R_T + \pi m/4) + (R_\varphi + R_T)}{\cos \theta} \end{cases} \quad (10)$$

将 $S_T(O_T-X_T Y_T Z_T)$ 中的坐标转换到 $S_1(O_1-X_1 Y_1 Z_1)$ 后,可以获得所切制齿轮的齿面方程为:

$$\begin{cases} x_1 = [- (\pm q \sin \alpha + R_T \pm \pi m/4) \cos \theta + R_\varphi + R_T] \cos \varphi - (q \cos \alpha + R) \sin \varphi \\ y_1 = [- (\pm q \sin \alpha + R_T \pm \pi m/4) \cos \theta + R_\varphi + R_T] \sin \varphi + (q \cos \alpha + R) \cos \varphi \\ z_1 = (\pm q \sin \alpha + R_T \pm \pi m/4) \sin \theta \\ q = \mp \sin \alpha \frac{\cos \theta (R_T + \pi m/4) + (R_\varphi + R_T)}{\cos \theta} \end{cases} \quad (11)$$

1.5 瞬时接触线

啮合函数 $\Gamma = \Gamma(q, \theta, \varphi)$ 是参数变量 q, θ, φ 的函数。因为 $\varphi_1 = \omega_1 t$,在此将 φ_1 看作是某一瞬时代入 Γ 的一个函数,从而可得到此刻齿条刀具和齿坯的瞬时接触线的函数表达式。

如果把任意时刻的 φ_1 值代入式(7),就能得到整个表面的接触线方程为:

$$\begin{cases} x_T = - \left[(1 + \sin^2 \alpha) (R_T \pm \pi m/4) + \sin^2 \alpha \frac{R_\varphi + R_T}{\cos \theta} \right] \cos \theta \\ y_T = \left[(1 + \sin^2 \alpha) (R_T \pm \pi m/4) + \sin^2 \alpha \frac{R_\varphi + R_T}{\cos \theta} \right] \sin \theta \\ z_T = \mp \sin \alpha \cos \alpha \left(R_T \pm \pi m/4 + \frac{R_\varphi + R_T}{\cos \theta} \right) \end{cases} \quad (12)$$

1.6 齿廓方程

在齿轮轴向中间截面,由其展成坐标系可知: $b =$

0,那么 θ 也为零。将这两个值代入式(11)中,得到中间截面的齿廓方程为:

$$\begin{cases} x_1 = [- (\pm q \sin \alpha + R_T \pm \pi m/4) + R_\varphi + R_T] \cos \varphi - (q \cos \alpha + R) \sin \varphi \\ y_1 = [- (\pm q \sin \alpha + R_T \pm \pi m/4) + R_\varphi + R_T] \sin \varphi + (q \cos \alpha + R) \cos \varphi \\ q = \mp \sin \alpha (R_T + \pi m/4 + R_\varphi + R_T) \end{cases} \quad (13)$$

根据式(13)可以看出,该齿轮轴向对称面的齿廓形状为渐开线。

同理,在轴向非对称面上,令 $z_1 = b$,根据式(11)中 Z_1 和 q 的表达式,可以得到:

$$\varphi = \{ [-b/\tan \theta + (R_T \pm \pi m/4) \cos \theta] / \sin^2 \alpha - (R_T + \pi m/4) \cos \theta - R_T \} / R \quad (14)$$

从而可得到非中间截面的齿廓的表达式为:

$$\begin{cases} x_T = [- (\pm q \sin \alpha + R_T \pm \pi m/4) \cos \theta + R_\varphi + R_T] \cos \varphi - (q \cos \alpha + R) \sin \varphi \\ y_T = [- (\pm q \sin \alpha + R_T \pm \pi m/4) \cos \theta + R_\varphi + R_T] \sin \varphi + (q \cos \alpha + R) \cos \varphi \\ q = \mp \sin \alpha \frac{\cos \theta (R_T + \pi m/4) + (R_\varphi + R_T)}{\cos \theta} \\ \varphi = \{ [-b/\tan \theta + (R_T \pm \pi m/4) \cos \theta] / \sin^2 \alpha - (R_T + \pi m/4) \cos \theta - R_T \} / R \end{cases} \quad (15)$$

2 基于有限元的圆弧齿线圆柱齿轮接触应力分析

基于有限元的圆弧齿线圆柱齿轮接触应力分析步骤如下:

(1) 模型材料属性定义

在 ABAQUS 中建立材料信息,如弹性模量 $E = 2.08 \text{ MPa}$,泊松比 $\nu = 0.298$,材料 17CrNiMo6。

(2) 建立分析步和相互作用

建立分析步,主要包括:定义分析类型(static)、定义分析增量步、确定迭代方法,创建场变量与历史变量,并确定输出参数,开启非线性,定义相互作用为接触,设置圆弧齿线齿轮副有限元分析的接触类型为“无摩擦”;主动与从动以各自旋转中心建立 MPC (multi-point constrain) 约束。

(3) 施加约束和力矩

在主动轮上施加扭矩,其大小为 $6.08 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{mm}$;同时,对主动轮添加 MPC 约束,并将其旋转轴方向设置为自由,其他旋转和平移设置为固定。对于从动轮

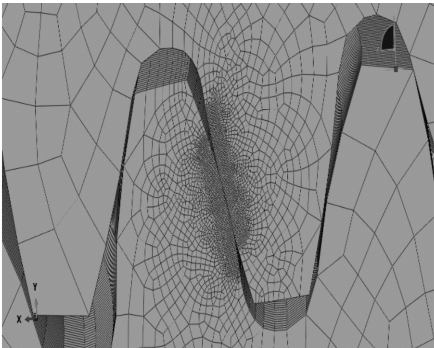
而言,MPC 固定约束,全向固定。

(4) 网格划分

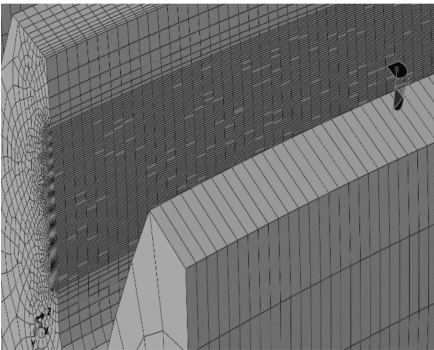
笔者采用扫掠方式对齿轮副进行网格画分。网格类型采用 C3D8I,齿轮整体的单元大小设置为 2 mm,接触区域进行局部细分,大小设置为 0.02 mm。如果不满足要求,则要继续调整参数。在后续计算中,可以进一步细化网格,提高划分质量,并通过多次试算对比分析结果;若计算结果变化不大,则该网格可作为最终分析网格。

分析过程中,应对接触区域进行局部细分,每对齿轮的网格数量大概在 1.2×10^6 个左右。

齿轮网格划分结果如图 2 所示。



(a) 整体网格划分结果



(b) 局部网格划分结果(轴向)

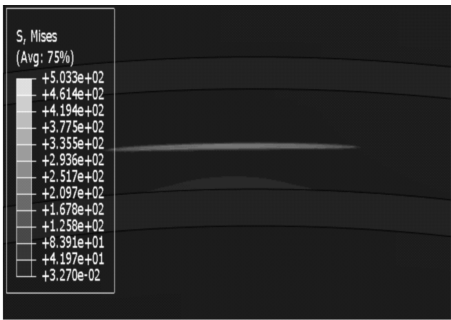
图 2 齿轮网格划分结果

(5) 求解与可视化

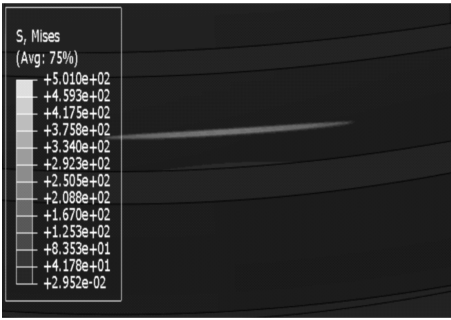
考虑每对齿轮的网格数量大概在 1.2×10^6 个左右,故求解时采用并行计算。求解后的主动轮和从动轮的应力云图如图 3 所示。

由图 3 的仿真分析结果可以看出:接触区域为靠近分度圆附近;主动轮的接触区域该在分度圆以上,且最大应力值为 503.3 MPa;从动轮的接触区域该在分度圆以下,且最大应力值为 501 MPa,故接触应力的最大值为 503.3 MPa;且主动轮与从动轮之间的差值为 2.3 MPa,仅为接触应力最大值的 0.457 0%,几乎一致,可以忽略。

同样,通过图 3 可以看出,在载荷的作用下,笔者所研究的齿轮其接触区域为椭圆,正确地印证了点接触齿轮在载荷的作用下接触区域为椭圆的事实。



(a) 主动轮分析结果



(b) 从动轮分析结果

图 3 主动轮和从动轮的应力云图

3 基于代理模型的齿线圆柱接触应力预测模型

3.1 试验设计与响应结果

常用的试验设计方法主要有均匀试验设计、正交试验设计、拉丁方试验设计等方法,本文研究了齿宽、模数、压力角、齿线半径与接触力之间的关系,利用回归正交试验法原理设计仿真方案选择了 4 个因素 3 个水平,齿轮设计因素水平表如表 1 所示。

表 1 齿轮设计因素水平

水平	齿宽/mm	模数/mm	压力角/(°)	齿线半径/mm
水平 1	38.836 85	2.967 37	18.836 85	191.842 5
水平 2	40	3.2	20	250
水平 3	41.163 15	3.432 63	21.163 15	308.157 5

本文采用正交试验进行了样本抽样,然后利用有限元方法得到了不同样本数据下的齿轮的接应力,根据正交表可知,抽样的样本为 9 个样本, $L_9(3^4)$ 正交试验圆弧齿轮接触应力仿真结果如表 2 所示。

表 2 $L_9(3^4)$ 正交试验圆弧齿轮接触应力仿真结果

编号	齿宽 /mm	模数 /mm	压力角 /(°)	齿线半径 /mm	接触应力 /MPa
1	38.836 85	2.967 37	18.836 85	191.842 5	542.7
2	38.836 85	3.2	20	250	457.2
3	38.836 85	3.432 63	21.163 15	308.157 5	396.8
4	40	2.967 37	20	308.157 5	452.9
5	40	3.2	21.163 15	191.842 5	494.1
6	40	3.432 63	18.836 85	250	449.1
7	41.163 15	2.967 37	21.163 15	250	469.6
8	41.163 15	3.2	18.836 85	308.157 5	440.2
9	41.163 15	3.432 63	20	191.842 5	476.7

3.2 改进 Kriging 模型

3.2.1 Kriging 代理模型

在解决非线性程度较高的问题时,Kriging(克里金)模型可较容易地获得理想的拟合结果,其插值结果定义为已知样本函数响应值的线性加权,即:

$$y(x) = \sum_{j=1}^k \beta_j f_j(x) + Z(x) \tag{16}$$

式中: $f_j(x)$ —函数,一般为多项式; β_j —相对应的系数; $Z(x)$ —静态随机过程,其满足均值为0,方差为 σ^2 。

且对于设计空间内,不同两点处所对应的随机变量之间的协方差为:

$$Cov[Z(x^i), Z(x^j)] = \sigma^2 R(x^i, x^j) \tag{17}$$

$$R(x^i, x^j) = \prod_{l=1}^{N_s} R_l(\theta_l, x_l^i, x_l^j) \tag{18}$$

式中: $R(x^i, x^j)$ —相关性函数,它表示不同位置处随机变量之间的相关性,常用的相关性函数为高斯型函数。

式(18)中, θ 为Kriging模型的变差函数的参数,其大小通过极大似然估计法求解优化问题的方式来确定,即:

$$\max \left\{ -\frac{N_s}{2} \ln(\tilde{\sigma}^2) - \frac{1}{2} \ln(\mathbf{R}) - \frac{N_s}{2} \ln(2\pi) \right\}, \theta > 0$$
$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N_s} (y_s - \mathbf{F}\tilde{\beta})^T \mathbf{R}^{-1} (y_s - \mathbf{F}\tilde{\beta}) \tag{19}$$

为保证 Kriging 预测值与真实函数值之间的均方根误差(RMSE)最小,Kriging 模型的近似表达式为:

$$\tilde{y}(x) = f_x^T \tilde{\beta} + [\mathbf{R}(x, x^{(1)}), \mathbf{R}(x, x^{(2)}), \cdots, \mathbf{R}(x, x^{(N_s)})]^T \mathbf{R}^{-1} (y_s - \mathbf{F}\tilde{\beta}) \tag{20}$$

式中: $\mathbf{F}$ —由基函数向量 f_x^T 组成的矩阵; $\tilde{\beta}$ —KRG模型系数的最小二乘估计值; $\mathbf{R}$ —相关性矩阵; N_s —样本点数。

3.2.2 鲸鱼算法

鲸鱼算法的原理来自于座头鲸的“泡泡网”觅食行为,基于这一特殊捕食策略的数学表达式如下:

$$D = |C \cdot X^*(t) - X(t)| \tag{21}$$

$$X(t+1) = X^*(t) - A \cdot D \tag{22}$$

式中: t —当前迭代次数; $X(t)$ —当前一座头鲸的坐标向量; $X(t+1)$ —下一次迭代后的目标坐标向量; $X^*(t)$ —到目前得到的最佳位置向量,它将随时间不断更新; D —当前这条座头鲸和最佳位置之间的距离。

上式(21 ~ 22)中, A 和 C 是系数,其表达式分别表示为:

$$A = 2a \cdot r - a \tag{23}$$

$$C = 2r \tag{24}$$

式中: a —在值域 $[0, 2]$ 上并随迭代时间线性递减的参数; r —区间 $[0, 1]$ 内的随机向量。

当 $|A| > 1$ 时,对应鲸鱼群的游走觅食行为。利用种群的随机个体坐标 X_{rand} 来定位导航寻找食物,其数学表达式如下:

$$X(t+1) = X_{rand}(t) - A \cdot D \tag{25}$$

当 $|A| < 1$ 时,对应鲸鱼群的包围捕食和攻击猎物这两种行为,其数学模型描述如下:

$$X(t+1) = X^*(t) - D \cdot e^{bl} \cdot \cos(2\pi l) \tag{26}$$

式中: b —与螺旋形状的常数; l —区间 $[-1, 1]$ 上的随机数。

由于鲸鱼的收缩包围机制和螺旋更新位置是一种同步行为,笔者在数学上选取概率相同方式来对其进行位置更新,于是可以得到以下表达式:

$$X(t+1) = \begin{cases} X^*(t) - A \cdot D & p < 0.5 \\ X^*(t) - D \cdot e^{bl} \cdot \cos(2\pi l) & p \geq 0.5 \end{cases} \tag{27}$$

根据基于 Kriging 和 WOA 算法,基于 WOA 算法的 Kriging 代理模型改进流程如图 4 所示。

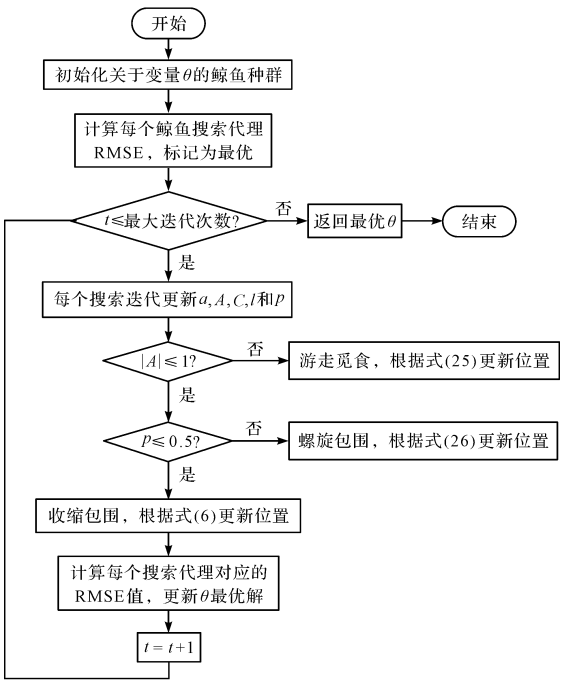


图 4 基于 WOA 算法的 Kriging 代理模型改进流程

4 数值仿真

笔者利用 Matlab 数字仿真平台,分别利用 Kriging 和基于 WOA 算法改进的 Kriging 算法,建立了圆弧齿轮接触应力的预测模型。

优化前后,相关系数(R^2)均方根误差(RMSE)以及相对最大绝对误差(RMAE)评价指标情况如表 3 所示。

表 3 优化前后评价指标情况

指标	Kriging	WOA-Kriging	对比
R^2	0.992 2	0.997 4	0.52% (提升)
RMSE	2.856 9	1.654 0	42.11% (降低)
RMAE	0.132 2	0.075 4	42.97% (降低)

从表 3 中可以看出:

(1)相关系数(R^2)从 0.992 2 提高到了 0.997 4,提高了 0.52%,且更加接近于 1;优化后的 Kriging 模

型全局近似能力更好 (RMSE 用于表示估计值与真实值之间减值大小);

(2) 优化后, RMSE 从 2.856 9 降低到 1.654 0, 降低了 42.11%, 则说明优化后的 Kriging 模型能够更好地对样本进行估计;

(3) 优化后, RMAE 从 0.132 2 降低到 0.075 4, 降低了 42.97%, 且更加接近于 0, 则说明其优化后减少

了局部误差。

综合来看, 采用 WOA 算法对 Kriging 算法进行改进, 提升了 Kriging 算法的拟合能力和精度。

利用 Kriging 和基于 WOA 算法改进的 Kriging 算法, 笔者分别建立了圆弧齿轮接触应力预测模型的测试集残差图, 分别如图 5、图 6 所示。

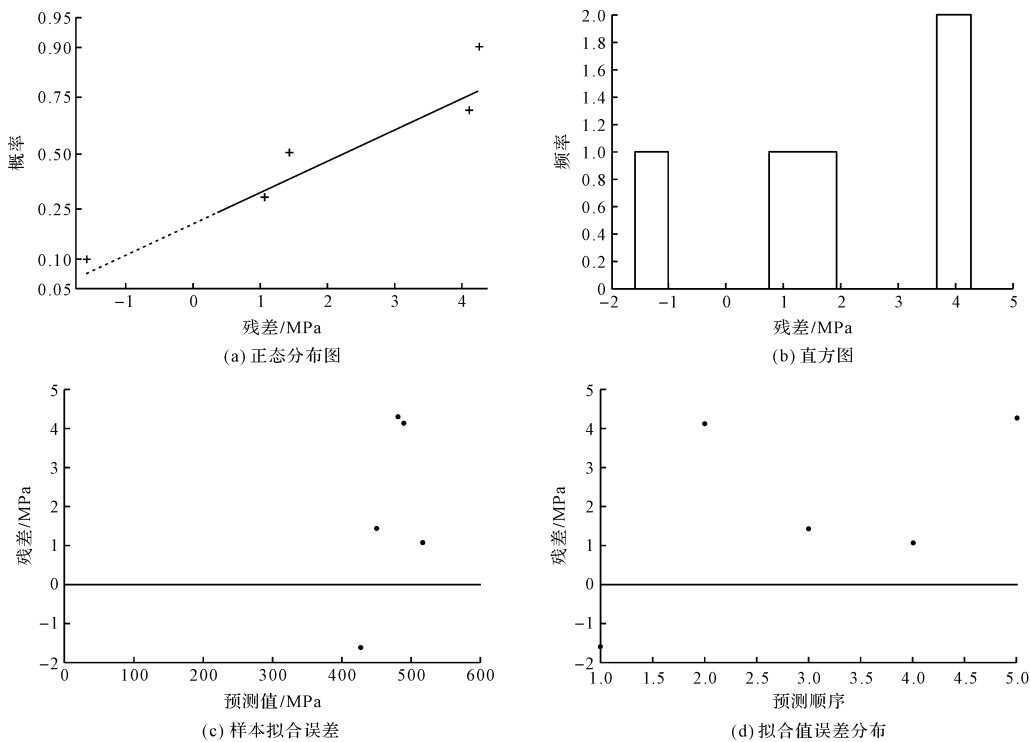


图 5 基于 Kriging 的圆弧齿轮接触应力预测模型残差图

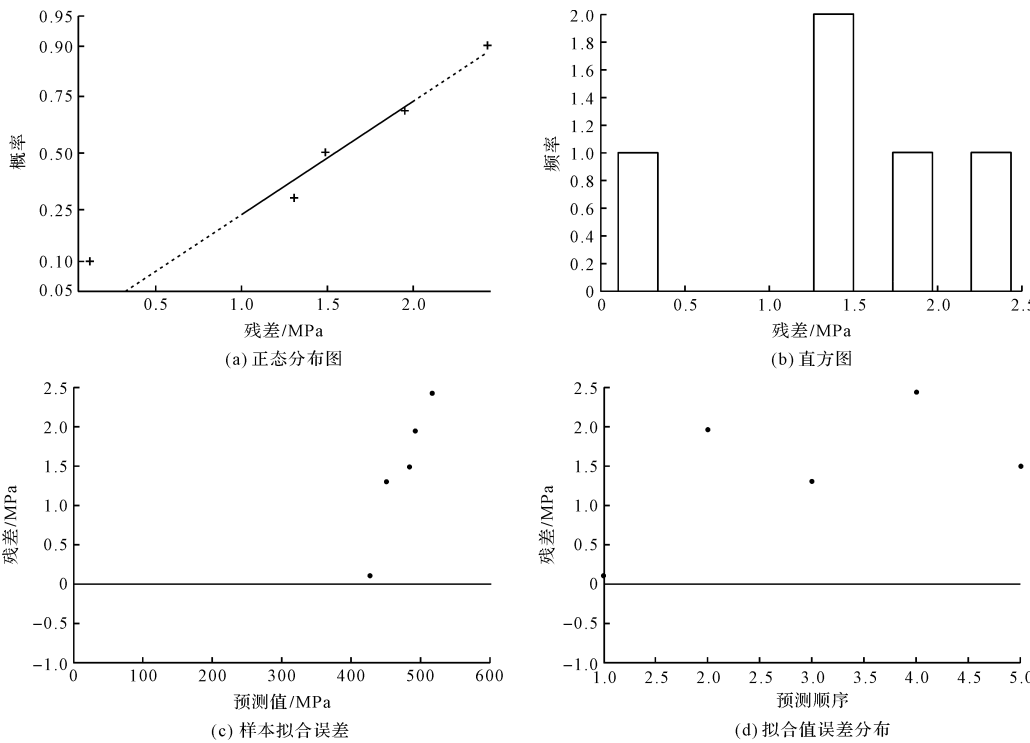


图 6 基于 WOA-Kriging 的圆弧齿轮接触应力预测模型残差图

从图5、图6中可以看出:

(1)基于传统 Kriging 算法和基于 WOA 算法改进的 Kriging 算法均能很好地建立圆弧齿轮接触应力预测模型,精度都在可使用的范围之内;

(2)Kriging 的误差范围在 $[-2, 4]$,而基于 WOA 算法改进的 Kriging 算法误差范围在 $[0, 3]$,由此可见,采用改进的 Kriging 算法,其精度得到了明显的提高。

5 结束语

为研究圆弧齿线圆柱齿轮设计参数对其接触应力的影响,笔者利用 Kriging 代理模型建立了齿轮的齿宽、模数、压力角、齿线半径与圆弧齿轮接触应力的数学模型,同时,提出了一种基于鲸鱼优化算法(WOA)的 Kriging 模型建模方法,通过鲸鱼优化算优化传统 Kriging 模型变异函数的参数,提高 Kriging 模型的建模精度。

研究所得到的结论如下:

(1)基于 WOA 算法改进的 Kriging 算法,相关系数(R^2)从0.992 2提高到了0.997 4, MSE 从2.856 9降低到1.654 0, RMAE 从0.132 2降低到0.075 4,改进后的算法其相关系数(R^2),均方根误差(RMSE)以及相对最大绝对误差(RMAE)均得到了不同程度的改良,提高了传统 Kriging 算法的全局近似能力,减少了局部误差,提升了拟合精度;

(2)基于传统的 Kriging 算法和基于 WOA 算法改进的 Kriging 算法均能很好地建立圆弧齿轮接触应力预测模型,精度都在可使用的范围之内,但是 Kriging 的误差范围在 $[-2, 4]$,而基于 WOA 算法改进的 Kriging 算法误差范围在 $[0, 3]$;精度得到了明显的提高,能够为其优化设计参数和各参数对其接触应力影响的显著性分析,提供更加精确的数学模型。

参考文献(References):

- [1] 李 杰,孙青军,王乐勤.渐开线齿轮的接触分析[J].工程设计学报,2009,16(1):27-31.
- [2] 张 祺,张敬东,唐 锐.面向制造的圆弧齿线圆柱齿轮建模及特性分析[J].机械传动,2013,37(10):102-105.

- [3] 长谷川吉三郎,太田信之.关于圆弧齿线齿轮的切齿机床[J].精密机械,1952,18(8):253-257.
- [4] TSENG J T, TSAY C B. Mathematical model and surface deviation of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth cut by a hob cutter[J]. JOURNAL OF MECHANICAL DESIGN,2005,127(5):982-987.
- [5] TSENG R T, TSAY C B. Contact characteristics of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth[J]. MECHANISM AND MACHINE THEORY,2004,39(9):905-919.
- [6] TSENG J T, TSAY C B. Undercutting and contact characteristics of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth generated by hobbing[J]. JOURNAL OF MECHANICAL DESIGN,2006,128(3):634-643.
- [7] FUENTES A, RUIZ-ORZAEZ R, GONZALEZ-PEREZ I. Computerized design, simulation of meshing, and finite element analysis of two types of geometry of curvilinear cylindrical gears[J]. COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING,2014,272:321-339.
- [8] 曹 磊,侯 力,赵 斐,等.变双曲圆弧齿线圆柱齿轮精确三维建模研究[J].机械设计与制造,2019(S1):54-56.
- [9] 马登秋,叶振环,冯前军,等.变双曲圆弧齿线圆柱齿轮齿面接触应力分布和啮合位置变化规律研究[J].制造技术与机床,2019(9):53-58.
- [10] 陈 帅,侯 力,汤 梦,等.变双曲圆弧齿线圆柱齿轮动态接触特性分析[J].机械传动,2018,42(9):85-89.
- [11] 王 虹,侯 力,赵 斐,等.圆弧齿线圆柱齿轮动态接触性能分析[J].组合机床与自动化加工技术,2017(6):37-40.
- [12] 张海燕,侯 力,魏永峭,等.变位圆弧齿线圆柱齿轮建模及接触强度分析[J].机械传动,2015,39(7):20-22.
- [13] 李 波,侯 力,姜 平,等.圆弧齿线圆柱齿轮传动副建模及接触强度分析[J].机械传动,2014,38(2):100-105.
- [14] 李 琴,刘海东,张 祺.新型圆弧齿线圆柱齿轮齿面方程及参数化建模研究[J].机械传动,2016,40(8):50-53.
- [15] 吴 超,董金善,曾子杨.矩形纺丝箱模态影响因素[J].轻工机械,2019,37(1):100-103.
- [16] 邓发云,张 祺.新型圆弧齿线圆柱齿轮数学模型及其模态分析[J].机械传动,2018,42(1):22-26.

[编辑:李 辉]

本文引用格式:

童 钦,张 祺,梁 君,等.圆弧齿线圆柱齿轮接触应力预测模型研究[J].机电工程,2020,37(7):751-757.

TONG Qin, ZHANG Qi, LIANG Jun, et al. Contact stress prediction model of cylindrical gear with arc tooth[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2020,37(7):751-757.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>