DOI:10.3969/j.issn.1001 - 4551.2019.01.002

# 球面三自由度并联机构瞬时运动分析*

史革盟
(宝鸡文理学院 机械工程学院,陕西 宝鸡 721013)

**摘要**:为解决球面三自由度并联机构末端构件上角锥的瞬时定位问题,结合该机构仅具有 3 个转动自由度的结构特点,采用四元数代数表示构件的有限转动,将机构运动分析转化为求解瞬时转动四元数算子。开展了该机构上角锥相对参考坐标系的微分转动分析,建立了描述上角锥瞬时转动四元数算子的运动微分方程和瞬时转动轴连续轨迹曲面的矢量方程,导出了机构运动微分方程的基础解系,提出了以瞬轴面导线的曲率和挠率量化机构在某一时刻微分运动的特征;在 Matlab 软件中通过数值积分和数值微分两种方法,求得了四元数算子瞬时转动轴线的变化轨迹和等效转角的变化曲线;瞬轴面导线变化平稳,预示了机构在所给的运动学参数下具有良好的运动学品质,得到了两种数值方法截断误差的预估值和所能达到的精度等级。仿真结果表明:数值积分方法精度略高。

**关键词**:球面并联机构;四元数代数;运动微分方程;数值积分
**中图分类号**:TH112 **文献标志码**:A **文章编号**:1001 - 4551(2019)01 - 0007 - 06

# Instantaneous motion analysis of a spherical 3-DOF parallel mechanism

SHI Ge-meng
(College of Mechanical Engineering, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China)

**Abstract**: Aiming at solving the instantaneous location problem of the angle cone on the end member of the spherical 3-DOF parallel mechanism with only 3 rotational freedoms, the component finite rotation was expressed by the quaternion algebra, and the mechanisms kinematic analysis was transformed into solving quaternion operator with instantaneous rotation. By analyzing the differential rotation of the angle cone relative to the reference coordinate system on a spherical 3-DOF parallel mechanism, a quaternion operator of the motion differential equation describing the instantaneous rotation of the angle cone and the vector equation of the continuous curved surface of the instantaneous rotating axis was established, and the basic solution system of the mechanism motion differential equations was derived. The characteristics of differential motion of a mechanism at a certain moment were quantified by the axode curvature and torsion. With Matlab software, two methods of numerical integration and numerical differentiation were used to obtain the change trajectory of the quaternion operator instantaneous rotation axis and the change curve of the equivalent rotation angle, the change of the axode axis was stable, which indicated that the mechanism had good kinematics character under the kinematic parameters. The prediction value of the truncation error and the accuracy grades of the two numerical methods were given. The simulation results indicate that the accuracy of the numerical integration method is slightly higher.

**Key words**: spherical parallel mechanism; quaternion algebra; motion differential equations; numerical integration

## 0 引 言

四元数最早应用于刚体的定位问题,使刚体产生角速度或在刚体上施加控制力偶,以便与刚体固连的动坐标系与基准坐标系的方位保持一致。四元数因两个优点在各种球面机构中得到了广泛的应用:(1)四

**收稿日期**:2018 - 05 - 22
**基金项目**:国家自然科学基金资助项目(11302003);陕西省教育厅资助项目(14JK1043);宝鸡市科学研究计划项目(14GYGG - 3);宝鸡文理学院科研计划项目(ZK16042,YK2018014)
**作者简介**:史革盟(1977 - ),女,陕西乾县人,硕士,副教授,主要从事机器人动力学及其控制方面的研究。E-mail:shigemeng@126.com

元数可以与球面上的一段大圆弧对应起来,并且球面上大圆弧的几何加法等于与其对应的四元数反向乘积;(2)四元数是表示有限转动的最简明方法。KONG Xian-wen[1]以四元数代数和几何分析方法建立了一种可重构的三自由度并联机构的约束条件,给出了欧拉参数表示的运动学方程及可操作模式;程世利等[2]采用四元数表示旋转变换矩阵,得到了 Stewart 并联机构四元数形式的基本方程和罗德里格参数表示奇异位形方程;鲁开讲[3]建立了球面机构与球面上大圆弧的对应关系,将弧的几何加法和旋转变化表示成四元数的乘积,得到了机构位置方程;赵德胜[4]采用四元数形式的正交变换描述 6-UPS 并联机构动平台方位,导出速度传递矩阵,得到了机构的三类奇异位形;李成刚[5]采用四元数研究球面机构各杆件的空间位置,导出了球面并联机构的简洁运动学方程;赵德胜[6]采用四元数描述 6-SPS 并联机构位姿矩阵,导出了无间隙机构运动方程,进一步分析了含间隙机构的奇异位形。

本文将以四元数描述的旋转变换建立机构末端构件上角锥的微分运动方程,并给出其数值解。

# 1 四元数表示的旋转变换

## 1.1 四元数代数及其性质

哈密顿于 1843 年提出了四元数代数[7]:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\boldsymbol{i}_1 + \lambda_2\boldsymbol{i}_2 + \lambda_3\boldsymbol{i}_3$$
$$\mathrm{sqal}\boldsymbol{\Lambda} + \mathrm{vect}\boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda} \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{\Lambda}$— 四元数;$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$— 四元数元素,均为实数;$\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$—3 个虚数单位,它等价于三维空间的单位矢量;sqal$\boldsymbol{\Lambda}$— 四元数标量函数;vect$\boldsymbol{\Lambda}$— 四元数矢量函数;$\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}$— 分别为四元数的标量部分和矢量部分。

两个四元数 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 之积仍为四元数,即:

$$\boldsymbol{\Lambda}\circ\boldsymbol{M} = \lambda_0\mu_0 - \lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 - \lambda_3\mu_3 + \lambda_0(\mu_1\boldsymbol{i}_1 + \mu_2\boldsymbol{i}_2 + \mu_3\boldsymbol{i}_3) + \mu_0(\lambda_1\boldsymbol{i}_1 + \lambda_2\boldsymbol{i}_2 + \lambda_3\boldsymbol{i}_3) + \begin{vmatrix}\boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\end{vmatrix} \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{M}$— 四元数;$\mu_0,\mu_1,\mu_2,\mu_3$— 四元数 $\boldsymbol{M}$ 的元素。

定义四元数 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的范数和共轭四元数分别为:

$$\|\boldsymbol{\Lambda}\| = \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}\circ\boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda} \tag{3}$$

式中:$\|\boldsymbol{\Lambda}\|$— 四元数范数;$\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}$— 共轭四元数。

范数等于 1 的四元数称为规范化四元数,可写成以下形式:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} + \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} \tag{4}$$

取 $\boldsymbol{\lambda}$ 方向的单位矢量 $\boldsymbol{\xi}$,则式(4)可表示为:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} + \boldsymbol{\xi}\frac{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}{\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}\cdot \cos\theta + \boldsymbol{\xi}\sin\theta \tag{5}$$

式中:$\boldsymbol{\xi}$—$\boldsymbol{\lambda}$ 方向的单位矢量,$\boldsymbol{\xi} = \xi_1\boldsymbol{i}_1 + \xi_2\boldsymbol{i}_2 + \xi_3\boldsymbol{i}_3$;$\xi_1,\xi_2,\xi_3$— 矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 的方向余弦;$\theta$— 角度参数,$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}{\lambda_0}\right)$。

## 1.2 四元数表示的旋转变换

借助四元数可以将刚体的任意有限转动表示成四元数的乘积,这是旋转变化最简明的形式。

**定理 1**:刚体有限转动定理。设 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为规范化四元数,$\boldsymbol{R}$ 为非标量四元数,则正交变换为:

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{\Lambda}\circ\boldsymbol{R}\circ\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} \tag{6}$$

式中:$\boldsymbol{R}'$— 对 $\boldsymbol{R}$ 进行正交变换所得的四元数。

$\boldsymbol{R}'$ 范数和标量部分分别等于 $\boldsymbol{R}$ 的范数和标量部分,矢量部分 vect$\boldsymbol{R}'$ 可看作是将四元数 $\boldsymbol{R}$ 的矢量 vect$\boldsymbol{R}$ 绕以 vect$\boldsymbol{\Lambda}$ 为轴的锥而旋转 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的二倍角得到的,即:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{\xi}\sin\frac{\theta}{2} \tag{7}$$

将矢量 vect$\boldsymbol{R}$ 绕轴 $\boldsymbol{\xi}$ 旋转角度 $\theta$ 就得到矢量 vect$\boldsymbol{R}'$。

当转角是一个无限小量时,四元数算子近似成:

$$\Delta\boldsymbol{\Lambda} = 1 + \boldsymbol{\xi}\frac{\Delta\theta}{2} \tag{8}$$

式中:$\Delta\boldsymbol{\Lambda}$— 微分转动四元数算子;$\Delta\theta$— 微分转角。

与转动轴 $\boldsymbol{\xi}$ 固连的矢量 $\boldsymbol{r}$ 变换成:

$$\boldsymbol{r}' = \Delta\boldsymbol{\Lambda}\circ\boldsymbol{r}\circ\Delta\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\xi}\frac{\Delta\theta}{2}\circ\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{\xi}\frac{\Delta\theta}{2} - \boldsymbol{\xi}\circ\boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{\xi}\frac{\Delta\theta^2}{4} \tag{9}$$

式中:$\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$— 分别为四元数 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{R}'$ 的矢量部分。

忽略式中的二阶无穷小量可得矢量 $r$ 的增量:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{\xi}\circ\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{\xi})\frac{\Delta\theta}{2} \tag{10}$$

式中:$\Delta\boldsymbol{r}$— 矢量 $r$ 在转动过程中的增量。

由四元数乘法式(2)可知:改变四元数相乘的顺序只是变换式中行列式的第二、三行,其余项不变,所以有:

$$\Delta\boldsymbol{r} = 2\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3\\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}\frac{\Delta\theta}{2} = \boldsymbol{\xi}\Delta\theta\times\boldsymbol{r} \tag{11}$$

上式两端除以转动时间 $\Delta t$,并取极限可得:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\xi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{12}$$

式中:$\boldsymbol{\omega}$— 瞬时转动角速度矢量。

对比式(11,12),可将无限小量转动的四元数算子表示成:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Lambda}=1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}t \tag{13}$$

## 2　球面三自由度并联机构的运动学方程

空间球面三自由度并联机构如图 1 所示。

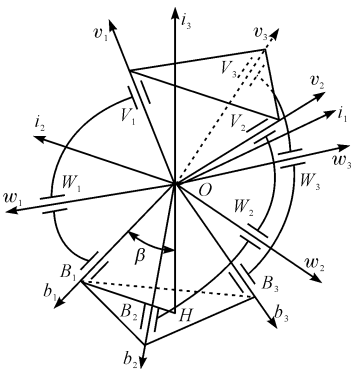



图 1　球面三自由度并联机构

上、下角锥均为正三棱锥,它们之间通过 3 条相同的 3 转动副运动链连接,机构全部转动副的轴线汇交于一点 $O$,作为球面机构的转动中心,设所有转动副中心都位于同一单位球面上。上角锥可实现绕 $O$ 的定点转动,具有 3 个独立的转动自由度。取参考坐标系 $O-\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3$,基矢量 $\boldsymbol{i}_3$ 垂直于下角锥底面 $B_1B_2B_3$,基矢量 $\boldsymbol{i}_1$ 的方向由 $\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{i}_3$ 确定,即 $\boldsymbol{i}_1\perp$ 平面 $OB_1H$,$B_2B_3$ 垂直于 $OH$ 和 $B_1H$,也即垂直于平面 $OB_1H$,所以 $\boldsymbol{i}_1$ 平行于 $B_2B_3$,按右手规则确定基矢量 $\boldsymbol{i}_2$,它平行于 $HB_1$。

上角锥固连的动坐标系 $O-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ 如图 2 所示。

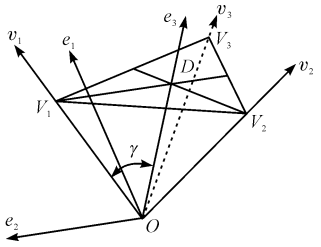



图 2　上角锥的动坐标系

基矢量 $\boldsymbol{e}_3$ 垂直于上角锥底面 $V_1V_2V_3$,基矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 的方向由 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{e}_3$ 确定,即 $\boldsymbol{e}_1\perp$ 平面 $OV_1D$,$V_2V_3$ 也垂直于平面 $OV_1D$,所以 $\boldsymbol{e}_1$ 平行于 $V_2V_3$,按右手规则确定基矢量 $\boldsymbol{e}_2$,它平行于 $DV_1$。

### 2.1　机构的运动学方程

设变坐标系 $I$ 的规范化正交基到坐标系 $E$ 的规范化正交基的运算由四元数算子 $\boldsymbol{\Lambda}$ 给定,即:

$$\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{\Lambda}\circ\boldsymbol{i}_k\circ\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}\quad k=1,2,3 \tag{14}$$

式中:$\boldsymbol{i}_k,\boldsymbol{e}_k$— 坐标系 $I$ 和 $E$ 的规范化正交基。

即认为在该瞬时将坐标系 $I$ 绕轴 $\boldsymbol{\xi}$ 旋转角度 $\theta$ 就到达坐标系 $E$ 所在的位置。

为了得到四元数 $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ 的增量,设在时间间隔 $\Delta t$ 内,动坐标系从 $\boldsymbol{E}(t)$ 变换到位置 $\boldsymbol{E}(t+\Delta t)$,与这两个位置对应的四元数记为 $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}(t+\Delta t)$,它们给出的动坐标系 $\boldsymbol{E}(t)$、$\boldsymbol{E}(t+\Delta t)$ 和参考坐标系 $I$ 的位置关系符合式(14)。另一方面,在时刻 $t$ 和 $t+\Delta t$ 坐标系 $E$ 的位置关系取决于坐标系 $E$ 的角速度矢量和无限小转动四元数 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Lambda}$。

将四元数 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Lambda}$ 的分量表示在坐标系 $E$ 上,从坐标系 $I$ 到 $\boldsymbol{E}(t+\Delta t)$ 的变换可以看成是由系 $I$ 到 $\boldsymbol{E}(t)$,再由 $\boldsymbol{E}(t)$ 到 $\boldsymbol{E}(t+\Delta t)$ 两次转动合成的,合成转动的特征四元数等于两次转动的特征四元数的乘积:

$$\boldsymbol{\Lambda}^*(t+\Delta t)=\boldsymbol{\Lambda}^*(t)\circ\mathrm{d}\boldsymbol{\Lambda}^* \tag{15}$$

式中:$\boldsymbol{\Lambda}^*$— 特征四元数;$\Delta t$— 时间增量。

各旋转变换四元数算子应取成规范化四元数。

四元数 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Lambda}^*$ 代表以其轴线为轴 $\boldsymbol{E}(t)$ 到 $\boldsymbol{E}(t+\Delta t)$ 的旋转变化,所以角速度矢量在这两坐标系上的投影必然相等。如果将 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Lambda}^*$ 取在坐标系 $\boldsymbol{E}(t)$ 上,其分量就是角速度矢量在 $\boldsymbol{E}(t)$ 上的投影。在这种情形两次旋转变换都是相对当前坐标系进行的,合成转动的四元数等于两次转动四元数按顺序的乘积:

$$\boldsymbol{\Lambda}^*(t+\Delta t)=\boldsymbol{\Lambda}^*(t)\circ\mathrm{d}\boldsymbol{\Lambda}^*=\boldsymbol{\Lambda}^*(t)\circ\left(1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_E(t)\mathrm{d}t\right) \tag{16}$$

式中:$\boldsymbol{\omega}_E$— 角速度矢量在坐标系 $E$ 中的表示。

式(16) 建立了两个相邻时刻的四元数关系,适应于机构位置数值解法,将其展开可得:

$$\boldsymbol{\Lambda}^*(t+\Delta t)-\boldsymbol{\Lambda}^*(t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}^*(t)\circ\boldsymbol{\omega}_E(t)\mathrm{d}t \tag{17}$$

从中可以得出:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Lambda}^*(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{\Lambda}^*(t+\Delta t)-\boldsymbol{\Lambda}^*(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\Lambda^*(t)\circ\boldsymbol{\omega}_E(t) \tag{18}$$

上式称为机构运动学方程,它是由 4 个标量方程构成的一阶线性微分方程组:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\lambda}}_0 = \dfrac{1}{2}(-\boldsymbol{\omega}_1\lambda_1 - \boldsymbol{\omega}_2\lambda_2 - \boldsymbol{\omega}_3\lambda_3)\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_1\lambda_0 + \boldsymbol{\omega}_3\lambda_2 - \boldsymbol{\omega}_2\lambda_3)\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_2\lambda_0 + \boldsymbol{\omega}_1\lambda_3 - \boldsymbol{\omega}_3\lambda_1)\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_3 = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_3\lambda_0 + \boldsymbol{\omega}_2\lambda_1 - \boldsymbol{\omega}_1\lambda_2)\end{cases} \tag{19}$$

式中：$\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\omega}_3$— 角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_E$ 在坐标系 $E$ 中的分量。

写成矢量形式为：

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\lambda}) \tag{20}$$

可用四阶龙格库塔 4 阶方法求解：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \boldsymbol{\lambda}_n + \dfrac{h}{6}(\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + 2\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4)\\ \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t_n,\boldsymbol{\lambda}_n)\\ \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}\left(t_n + \dfrac{h}{2},\boldsymbol{\lambda}_n + \dfrac{h}{2}\boldsymbol{k}_1\right)\quad n = 1,2,\cdots\\ \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}\left(t_n + \dfrac{h}{2},\boldsymbol{\lambda}_n + \dfrac{h}{2}\boldsymbol{k}_2\right)\\ \boldsymbol{k}_4 = \boldsymbol{f}(t_n + h,\boldsymbol{\lambda}_n + h\boldsymbol{k}_3)\end{cases} \tag{21}$$

式中：$\boldsymbol{\lambda}_n,\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$— 微分方程数值解序列；$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4$— 分别为函数 $\boldsymbol{f}(t,\lambda)$ 在给定点之值；$h$— 微分步长。

微分步长的局部截断误差为[8]：

$$\varepsilon_{n+1} = |\boldsymbol{\lambda}(t_{n+1}) - \boldsymbol{\lambda}_{n+1}| = 0(h^5) \tag{22}$$

式中：$\varepsilon_{n+1}$— 数值方法在第 $n+1$ 步的截断误差，即该方法具有 4 阶精度。

## 2.2　机构上角锥位形描述

动坐标系 $E$ 可以看作由坐标系 $I$ 连续进行旋转 3 个欧拉角，如图 3 所示。

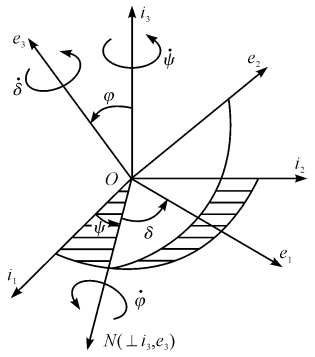



图 3　欧拉角

（1）坐标系 $I$ 绕 $\boldsymbol{i}_3$ 轴旋转 $\psi$ 角，$\boldsymbol{i}_1$ 轴到达节线 $ON$ 的位置；

（2）绕节线 $ON$ 旋转 $\varphi$ 角，$\boldsymbol{i}_3$ 到达 $\boldsymbol{e}_3$ 的位置；

（3）绕 $\boldsymbol{e}_3$ 轴旋转 $\delta$ 角即得到坐标系 $E$。

因以上变换是依次相对当前坐标系进行的，相应的方向余弦矩阵依次右乘可得：

$$\boldsymbol{R}_E = Rot(i_3,\psi)Rot(x_N,\varphi)Rot(e_3,\delta) = \begin{bmatrix}\cos\psi\cos\delta - \sin\psi\cos\varphi\sin\delta & -\cos\psi\sin\delta - \sin\psi\cos\varphi\cos\delta & \sin\psi\sin\varphi\\ \sin\psi\cos\delta + \cos\psi\cos\varphi\sin\delta & -\sin\psi\sin\delta + \cos\psi\cos\varphi\cos\delta & -\cos\psi\sin\varphi\\ \sin\varphi\sin\delta & \sin\varphi\cos\delta & \cos\varphi\end{bmatrix} \tag{23}$$

式中：$\boldsymbol{R}_E$— 旋转变换矩阵；$\psi,\varphi,\delta$— 欧拉角，分别称为进动角、章动角和自转角。

上角台位形用欧拉角描述，它转动角速度也可以用广义速度 $\dot{\psi}$、$\dot{\varphi}$ 和 $\dot{\delta}$ 表示：

$$\boldsymbol{\omega}_E = \dot{\delta}\boldsymbol{e}_3 + \dot{\psi}[\sin\psi\sin\varphi, -\cos\psi\sin\varphi,\cos\varphi]^{\mathrm{T}} + \dot{\varphi}R^T[\cos\psi,\sin\psi,0]^{\mathrm{T}} = [\cos\delta\dot{\varphi} + \sin\delta\dot{\psi} - \sin\delta\dot{\varphi} + \sin\varphi\cos\delta\dot{\psi}\quad \dot{\delta} + \cos\varphi\dot{\psi}]^{\mathrm{T}} \tag{24}$$

为了求得坐标系 $I$ 变换到坐标系 $E$ 的四元数算子 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的转角和轴线，认为坐标系 $I$ 绕四元数 $\boldsymbol{\Lambda}$ 矢量方向的单位矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 旋转 $\theta$ 角就得到坐标系 $E$，根据等效转动定理可得等效转轴 $\xi$ 和等效转角 $\theta$[9]：

$$\xi_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{2\mathrm{s}\theta},\xi_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{2\mathrm{s}\theta},\xi_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{2\mathrm{s}\theta} \tag{25}$$

$$\tan\theta = \pm\frac{\sqrt{(r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2}}{r_{11} + r_{22} + r_{22} - 1} \tag{26}$$

式中：$r_{ij}$— 初始时刻方向余弦矩阵 $R_E$ 的相应元素，$i,j = 1,2,3$。

瞬时轴连续轨迹构成直纹曲面，母线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{\xi}(t)$，所有母线交于坐标原点，矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 的末端形成瞬轴面的导线，则瞬轴面的矢量方程为：

$$\boldsymbol{r}_\sigma(t) = \boldsymbol{\xi}(t) + v\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = (1+v)\boldsymbol{\xi}(t) \tag{27}$$

式中：$v$— 母线 $\boldsymbol{\xi}$ 上一点到矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 末端的距离；$\boldsymbol{r}_\sigma$— 瞬轴面的矢径。

故上式是以 $v$ 和 $t$ 为参数的曲面方程。鉴于所有母线交于一点的数学特征，瞬轴面结构可用矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 末端曲线表示：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\xi}(t) \tag{28}$$

在每一点邻近的几何量来表示。曲线的切向量为：

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \tag{29}$$

由于 $\boldsymbol{\xi}$ 为单位矢量，具有固定长度，切向量 $\dot{\boldsymbol{\xi}} \perp \boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{\xi}$ 即为曲线的主法向量。由于 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\lambda$ 方向的单位矢量 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\lambda}/|\boldsymbol{\lambda}|$，曲线 $\boldsymbol{r}$ 的曲率和挠率分别为[10]：

$$k = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3} = \frac{\dot{\boldsymbol{\lambda}}\times\ddot{\boldsymbol{\lambda}}}{|\boldsymbol{\lambda}||\dot{\boldsymbol{\lambda}}|^3} \tag{30}$$

$$\tau = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})^2} = \frac{(\dot{\boldsymbol{\lambda}},\ddot{\boldsymbol{\lambda}},\dddot{\boldsymbol{\lambda}})}{|\boldsymbol{\lambda}|\ (\dot{\boldsymbol{\lambda}}\times\ddot{\boldsymbol{\lambda}})^2} \tag{31}$$

式中:$k$— 曲线曲率;$\tau$— 曲线挠率。

曲率可以描述瞬轴面在该点弯曲程度,挠率描述了曲线离开密切平面(主法向量和切向量张成的平面)的快慢。

### 2.3　机构运动学方程的通解

在实际应用中,上角锥的运动通常是按作业任务规划的,上角锥转动角速度 $\boldsymbol{\omega}_E$ 规定为时间的连续函数,在标量形式下,式(18)都是 4 个线性微分方程的方程组。根据线性微分方程理论,式(18)都有 4 个线性无关的基础解系,构成微分方程的通解,这个解满足下述定理。

**定理 2**　假定时间函数 $\boldsymbol{\omega}_E(t)$ 已知,并且该方程的一个特解为 $\boldsymbol{N}(t)$,方程式(18)的通解为:

$$\boldsymbol{\Lambda}_E = \mathbf{C}_E \circ \boldsymbol{N}(t) \tag{32}$$

式中:$\boldsymbol{\Lambda}_E$— 微分方程通解;$\boldsymbol{N}(t)$— 微分方程特解;$\mathbf{C}_E$— 常值四元数。

为了从基础解系中求出满足机构运动学初始条件 $\boldsymbol{\Lambda}_{E0}$ 的特解,常值四元数 $\mathbf{C}_E$ 必须满足初始条件:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{E0} = \boldsymbol{\Lambda}_E(t=0) = \mathbf{C}_{E0} \circ \boldsymbol{N}_0 \tag{33}$$

式中:$\boldsymbol{\Lambda}_{E0}$— 初始时瞬时转动四元数算子;$\boldsymbol{N}_0$— 特解的初值。

从而求得常值四元数:

$$\mathbf{C}_{E0} = \boldsymbol{\Lambda}_{E0} \circ \widetilde{\boldsymbol{N}}_0 \tag{34}$$

满足机构初始条件的运动微分方程的解为:

$$\boldsymbol{\Lambda}_E(t) = \boldsymbol{\Lambda}_{E0} \circ \widetilde{\boldsymbol{N}}_0 \circ \boldsymbol{N}(t) \tag{35}$$

### 2.4　机构运动学方程的近似积分

将式(18)积分:

$$\boldsymbol{\Lambda}(t) = \boldsymbol{\Lambda}(t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Lambda}(t') \circ \boldsymbol{\omega}_E(t')\,\mathrm{d}t' \tag{36}$$

根据定理 2,可以假设:

$$\boldsymbol{\Lambda}(t) = \boldsymbol{\Lambda}(t_0) \circ N(t) \tag{37}$$

代入式(36),可得:

$$N(t) = 1 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{N}(t') \circ \boldsymbol{\omega}_E(t')\,\mathrm{d}t' \tag{38}$$

在初始条件下,$t = t_0$ 时,有:

$$\boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{N}(t_0) = 1 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{N}(t') \circ \boldsymbol{\omega}_E(t')\,\mathrm{d}t' = 1 \tag{39}$$

为了构造运动学方程的数值积分格式,在式(37)中令 $t_0 = t_{n-1}$,$t = t_n = t_{n-1} + h$,则由式(37)可得:

$$\boldsymbol{\Lambda}_n = \boldsymbol{\Lambda}_{n-1} \circ \boldsymbol{N}_n \quad n = 1,2\cdots \tag{40}$$

式中:$\boldsymbol{\Lambda}_n$,$\boldsymbol{\Lambda}_{n-1}$— 通解 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的数值序列;$\boldsymbol{N}_n$— 特解的数值序列。

方程(38)可用毕卡法逼近:

$$\boldsymbol{N}(t) = 1 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\omega}_E(t')\,\mathrm{d}t' + \frac{1}{4}\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t'} \boldsymbol{\omega}_E(t'')\,\mathrm{d}t''\right] \circ \boldsymbol{\omega}_E(t')\,\mathrm{d}t' + \cdots \tag{41}$$

式中:$t'$— 形式积分变量。

令上式中的积分为:

$$\boldsymbol{\theta}^* = \int_0^t \boldsymbol{\omega}_E(t')\,\mathrm{d}t' \tag{42}$$

式中:$\boldsymbol{\theta}^*$— 角速度矢量的积分。

它的一阶向后差分为:

$$\nabla\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\theta}^*(t_n) - \boldsymbol{\theta}^*(t_{n-1}) = \int_0^{t_n} \boldsymbol{\omega}_E(t')\,\mathrm{d}t' - \int_0^{t_{n-1}} \boldsymbol{\omega}_E(t')\,\mathrm{d}t' = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \boldsymbol{\omega}_E(t')\,\mathrm{d}t' \tag{43}$$

式中:$\nabla\boldsymbol{\theta}^*$— 角速度矢量积分的一阶向后差分。

在每个步长内,用四阶内插多项式可将式(42)的数值积分用 $\boldsymbol{\theta}^*$ 的各阶差分表示,即:

$$\boldsymbol{\theta}^*(\tau) = \left(\nabla\boldsymbol{\theta}_n^* - \frac{1}{2}\nabla^2\boldsymbol{\theta}_n^* - \frac{1}{6}\nabla^3\boldsymbol{\theta}_n^* - \frac{1}{12}\nabla^4\boldsymbol{\theta}_n^*\right)\tau + \left(\frac{1}{2}\nabla^2\boldsymbol{\theta}_n^* - \frac{1}{24}\nabla^4\boldsymbol{\theta}_n^*\right)\tau^2 + \left(\frac{1}{6}\nabla^3\boldsymbol{\theta}_n^* + \frac{1}{12}\nabla^4\boldsymbol{\theta}_n^*\right)\tau^3 + \frac{1}{24}\nabla^4\boldsymbol{\theta}_n^*\tau^4 \tag{44}$$

式中:$\tau$— 每个步长内无因次时间,$\tau = (t_n - t_{n-1})/h$;$\nabla^k\boldsymbol{\theta}_n^*$— 角速度矢量积分向后的 $k$ 阶差分。

将式(42,44)代入式(41),并保留到四阶无穷小量得:

$$\boldsymbol{N}_n = 1 + \frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{\theta}_n^* - \frac{1}{8}|\nabla\boldsymbol{\theta}_n^*|^2 + \frac{1}{24}(\nabla\boldsymbol{\theta}_n^* \times \nabla^2\boldsymbol{\theta}_n^*) - \frac{1}{48}|\nabla\boldsymbol{\theta}_n^*|^2\nabla\boldsymbol{\theta}_n^* + \frac{1}{48}(\nabla\boldsymbol{\theta}_n^* \times \nabla^3\boldsymbol{\theta}_n^*) - \frac{1}{192}|\nabla\boldsymbol{\theta}_n^*|^2\nabla^2\boldsymbol{\theta}_n^* + \frac{1}{384}|\nabla\boldsymbol{\theta}_n^*|^4 + \cdots \tag{45}$$

其局部截断误差为:

$$\varepsilon_{n+1} = \boldsymbol{\lambda}(t_{n+1}) - \boldsymbol{\lambda}_{n-1} = -\frac{251}{720}0(h^5) \tag{46}$$

比较式(22,46)可知:数值积分法对已求得的函数数值序列采用 Newton 向后差分构造计算公式,它与四阶龙格库塔法同样具有四阶精度,但精度略高。

## 3　应用实例

给定机构上角锥的运动规律 $\psi = \frac{1}{3}\sin t$,$\varphi = 0.5\sin\left(\frac{1}{3}t\right)$,$\delta = 2\cos(2t)$,$t = [0,6.25\ \mathrm{s}]$。为了求得初始时刻($t=0$)坐标系 $E$ 变换到坐标系 $I$ 的四元数算子 $\boldsymbol{\Lambda}_{E0}$ 的转角和轴线,由式(25,26)可求得初始等效转动轴和等效转角为:$\xi_{10} = 0$,$\xi_{20} = 0$,$\xi_{30} = 1$,$\theta_0 = 114.591\ 6°$。故初始时刻四元数算子为:$\boldsymbol{\Lambda}_{E0} = \cos\frac{\theta_0}{2} +$

$\boldsymbol{\xi}_0 \sin\frac{\theta_0}{2} = \cos\frac{\theta_0}{2} + \boldsymbol{\xi}_0 \sin\frac{\theta_0}{2} = 0.540\,3 + 0.841\,5\boldsymbol{i}_3$。

依次由式(40,41) 可求解机构运动过程中算子四元数 $\boldsymbol{\Lambda}_k$ 的数值序列,相应的瞬时转动轴 $\boldsymbol{\zeta}_k$ 方向变化轨迹如图 4 所示。等效转角 $\theta_k$ 的变化曲线如图 5 所示。

等效转动轴轨迹和等效转角 $\theta_k$ 变化曲线连续光滑无尖点,预示着上角锥在所给的运动规律下角加速度变化平缓。动平台的等效转角可以由式(26) 解析法求得,也可以通过解微分方程式(18) 的数值微分方法和数值积分方法得到,3 种方法所得曲线基本是重合的。将两种数值方法求得的转角在极大值处($t$ = 2.05 s) 与解析法求得的真值进行比较,同为四阶的数值积分方法比微分方法精度略高,不同方法的精度比较情况如表 1 所示。

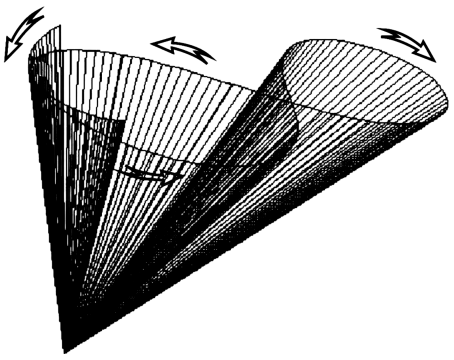


图 4 瞬时转动轴的变化轨迹

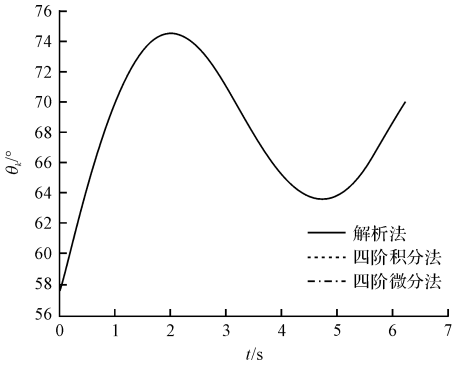



图 5 等效转角变化曲线

**表 1 不同方法的精度比较**

| | 解析法 | 四阶积分法 | 四阶微分法 |
|---|---|---|---|
| 最大转角 | 74.536 445 697 787 68 | 74.536 445 621 789 17 | 74.536 445 671 584 30 |
| 精度 | 真值 | $10^{-7} < \frac{251}{720}O(h^5)$ | $10^{-6} < O(h^5)$ |

## 4 结束语

为解决球面三自由度并联机构末端构件上角锥的瞬时定位问题,本研究采用四元数代数表示构件的有限转动,将机构运动分析转化为求解瞬时转动四元数算子,开展了该机构上角锥相对参考坐标系的微分转动分析。结果表明:

描述球面机构的旋转运动可以采用不同的运动学参数,各种方法彼此是等价的,但却有不同的特点,其中四元数标识的运动学方程的实质是一组 4 个标量线性微分方程组,它是球面机构运动学方程的最简明形式;得到瞬轴面轨迹方程,以其导线的曲率和挠率描述曲面的微分几何特征,揭示机构在某一时刻微分运动的特征;给出了满足机构初始条件的运动学基础解系;采用四阶数值积分和数值微分求解机构运动微分方程的数值解,两种方法均有 4 阶精度,但数值积分法精度略高。

**参考文献(References):**

[1] KONG Xian-wen . Reconfi guration analysis of a 3-DOF parallel mechanism using Euler parameter quaternions and algebraic geometry method[J]. **Mechanism and Machine Theory**,2014(74):188-201.

[2] 程世利,吴洪涛,王超群,等. 平面平台型 Stewart 并联机构的奇异性分析[J]. 机械工程学报,2011,47(9):1-7.

[3] 鲁开讲,牛禄峰,雷文莉,等. 球面三自由度并联机构位姿正解的研究[J]. 机械设计,2005,22(1):59-61.

[4] 赵德胜,吴荣军,张 雪. 基于四元数的 6-UPS 机构奇异性分析[J]. 机械传动,2015,39(2):72-76.

[5] 李成刚,缪群华,吴洪涛. 四元数表示的球面机构运动学分析[J]. 组合机床与自动化加工技术,2009(11):37-40.

[6] 赵德胜,吴荣军. 含 2 个 S 副间隙 6-SPS 机构奇异性分析[J]. 振动与冲击,2016,35(7):130-137.

[7] B · H 勃拉涅茨,N. 什梅格列夫斯基. 四元数在刚体定位问题中的应用[M]. 北京:国防工业出版社,1977.

[8] 翟瑞彩,谢伟松. 数值分析[M]. 天津:天津大学出版社,2000.

[9] 熊有伦. 机器人技术基础[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2004.

[10] 梅向明,黄敬之. 微分几何[M]. 北京:人民教育出版社,1981.

[**编辑**:李 辉]

**本文引用格式**:

史革盟. 球面三自由度并联机构瞬时运动分析[J]. 机电工程,2019,36(1):7 - 12.

SHI Ge-meng. Instantaneous motion analysis of a spherical 3-DOF parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2019,36(1):7 - 12.

《机电工程》杂志:http://www.meem.com.cn