

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2018.10.014

# 交流电机谐波电动势分布因数 出现负值的分析研究\*

龙 飞<sup>1</sup>, 蒋 伟<sup>2\*</sup>, 徐敏伟<sup>1</sup>, 莫岳平<sup>2</sup>

(1. 扬州光电产品检测中心, 江苏 扬州 225009; 2. 扬州大学 水利与能源动力工程学院, 江苏 扬州 225002)

**摘要:**针对运用现有交流电机谐波电动势分布因数公式计算电动势有效值出现负值的问题,对极相组谐波合成电动势中的分布因数进行了研究。提出了按平移求和法则首尾相连的  $q$  个等相位差非零相量必有外接圆的极相组相量合成新理论,应用此理论并结合电路相量图分析法和数学完全归纳法,归纳出了一个对应于  $v$  次谐波相邻两槽间夹角  $\alpha_v - 2k\pi$  分别为劣角、平角和优角的 3 分段新分布因数公式,并给出了  $q \rightarrow \infty$  的极限形式;选取三相绕组  $q=2, \dots, 8, \infty$ 、截取 1~19 次奇次谐波分别对新旧公式进行了数据验证。研究表明:新公式在计算谐波电动势分布因数时全程未出现负值,可替代现有公式并可用于谐波磁动势分布因数的计算。

**关键词:**谐波电动势;分布因数;相量图分析法;完全归纳法;极限分析

中图分类号:TH39;TM3

文献标志码:A

文章编号:1001-4551(2018)10-1085-09

## Analysis of negative values appearing in the calculation of the harmonic electromotive force distribution factor of AC machines

LONG Fei<sup>1</sup>, JIANG Wei<sup>2</sup>, XU Min-wei<sup>1</sup>, MO Yue-ping<sup>2</sup>

(1. Yangzhou Opto-Electrical Products Testing Institute, Yangzhou 225009, China;

2. School of Hydraulic Energy and Power Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225002, China)

**Abstract:** In order to solve the problem of negative values appearing in the calculation of effective values of harmonic electromotive forces (EMFs) of AC machines by using the existing harmonic distribution factor formula, the distribution factor in the resultant harmonic EMF for a pole-phase group was studied and a new phase-synthesis theory of a pole-phase group that there must be a circumscribed circle for  $q$  equal-phase-difference nonzero phasors which are linked end to end according to the sum rule of translation was put forward. By applying this theory combined with phasor diagram analysis in circuit theory and complete induction in mathematics, a new 3-piecewise distribution factor formula was induced corresponding to the  $v$ -th harmonic included angle between two adjacent slots  $\alpha_v - 2k\pi$  which is inferior angle, straight angle or reflex angle respectively, followed by the limit form of the formula when  $q \rightarrow \infty$ . The data validations for the existing and new formulae were carried out respectively by selecting  $q=2, \dots, 8, \infty$  and intercepting the 1st~19th odd harmonics for 3-phase windings. The results indicate that no negative value appears in the whole process of calculating the distribution factor of harmonic EMFs by the new, which can substitute the existing formula and be generalized to the calculation of the distribution factor of harmonic magnetomotive forces.

**Key words:** harmonic electromotive force (harmonic EMF); distribution factor; phasor diagram analysis; complete induction; limit analysis

收稿日期:2017-12-31

基金项目:国家自然科学基金资助项目(31571765);国家质检总局公益性行业科研专项项目(201410002)

作者简介:龙 飞(1980-),男,江苏扬州人,工程师,主要从事高效用能产品及高耗能环境试验设备能效测试技术方面的研究。E-mail:longfei\_forever@163.com

通信联系人:蒋 伟,男,博士,副教授。E-mail:jiangwei@yzu.edu.cn

## 0 引 言

交流电机产生的谐波感应电动势,注入公用电网后,会给电网和接在该电网的其他用电设备的运行带来不良影响甚至危害<sup>[1]</sup>。因此在设计交流电机时,应当根据国标中公用电网谐波电压限值的要求<sup>[2]</sup>,把感应电动势中的谐波含量限制在一定范围内。采用短距线圈和分布绕组能有效地改善电动势波形、抑制谐波分量,故一般的交流绕组大多采用短距、分布绕组。谐波电动势绕组因数 $k_{uv} = k_{pv} \times k_{dv}$ ,文献[3]中已详细论证了谐波节距因数 $k_{pv}$ ,因此,本研究将重点探讨绕组的另一个因数:谐波电动势分布因数 $k_{dv}$ (研究范围限定为三相整数槽绕组)。

国内外学者研究分布绕组分布因数的方法主要有两类:代数法和几何法<sup>[4-11]</sup>。代数法适应面广,但缺点是不够直观。几何法的优点是直观,目前主要针对基波电动势,KOSTENKO M、CHAPMAN S J、UMANS S D、汤蕴璆提出的基波公式可以统一表述为 $k_{d1} = (\sin(q\alpha_1/2))/(q\sin(\alpha_1/2))$ ,而针对谐波电动势尚缺乏深入的研究,现有谐波分布因数 $k_{dv}$ 公式均是用 $v\alpha_1 (= \alpha_v)$ 直接替换基波公式中的 $\alpha_1$ 衍生而来,比如 KOSTENKO M、汤蕴璆给出的谐波公式均可以表述为 $k_{dv} = (\sin(vq\alpha_1/2))/(q\sin(v\alpha_1/2))$ 。由于 $\alpha_v = v\alpha_1$ ,角的范围简单扩大带来了下列两种基波计算不会出现而谐波分布因数 $k_{dv}$ 和电动势有效值计算会出现的负值问题:

(1)  $(\alpha_v/2) = (v\alpha_1/2) \in ((2k_1 + 1)\pi, (2k_1 + 2)\pi)$  且  $(q\alpha_v/2) = (vq\alpha_1/2) \notin ((2k_2 + 1)\pi, (2k_2 + 2)\pi)$  ( $k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots$ )

(2)  $(\alpha_v/2) = (v\alpha_1/2) \notin ((2k_1' + 1)\pi, (2k_1' + 2)\pi)$  且  $(q\alpha_v/2) = (vq\alpha_1/2) \in ((2k_2' + 1)\pi, (2k_2' + 2)\pi)$  ( $k_1', k_2' = 0, 1, 2, \dots$ )

例如当 $\alpha_v = v\alpha_1 = (2k_3 + 1)\pi$  ( $k_3 = 0, 1, 2, \dots$ )时,根据现有谐波公式计算结果为 $k_{dv} = (\sin(q\pi/2))/q$ ,当 $q = 3, 7, 11, \dots$ 时为负值,这其中: $\alpha_v = 3\pi, 7\pi, 11\pi, \dots$ 属于第(1)种情况, $\alpha_v = \pi, 5\pi, 9\pi, \dots$ 属于第(2)种情况。

针对这一问题,本文提出应用极相组 $q$ 个等相位差非零相量合成的新理论,提出新的谐波电动势分布因数公式。

## 1 分布绕组谐波合成电动势相量模型

### 1.1 绕组分析常用基本量

$$\tau = \frac{Z_1}{2p} \quad (1)$$

$$q = \frac{Z_1}{2pm} \quad (2)$$

式中: $p, \tau$ —基波的极对数、极距; $q$ —每极每相槽数,本研究中 $q$ 为整数; $m$ —相数,本研究中 $m = 3$ ;  $Z_1$ —定子槽数。

### 1.2 谐波磁场的性质

$$\text{极对数关系: } p_v = vp \quad (3)$$

$$\text{极距关系: } \tau_v = \frac{Z_1}{2p_v} = \frac{Z_1}{2vp} = \frac{1}{v} \times \frac{Z_1}{2p} = \frac{1}{v} \tau \quad (4)$$

式中: $p_v, \tau_v$ — $v$ 次谐波的极对数、极距。

主极磁场仅含有奇次空间谐波,即 $v = 1, 3, 5, \dots$ 。

### 1.3 相合成电动势 $\dot{E}_{qv}$

两个线圈的基波合成节距用电角度表示,即:

$$\gamma_y = \frac{y}{\tau} \times 180^\circ \quad (5)$$

式中: $y$ —线圈基波合成节距,用槽数表示。

$v$ 次谐波的合成节距:

$$\gamma_{yv} = \frac{y}{\tau_v} \times 180^\circ = \frac{y}{\tau} \times 180^\circ = v\gamma_y \quad (6)$$

为论述方便,笔者以A相为例,把N极下的某个极相组(例如双层叠绕组的A相带)和S极下的对应极相组(例如双层叠绕组的X相带)对应导体的槽距定义为“极相组合成节距 $y_p$ ”,以区别于“线圈合成节距 $y$ ”。

#### 1.3.1 双层叠绕组

$$\text{“极相组合成节距” } y_p = \tau, \gamma_{y_p} = \frac{y_p}{\tau} \times 180^\circ =$$

$180^\circ, \gamma_{y_{pv}} = v\gamma_{y_p} = v \cdot 180^\circ$ ; 双层叠绕组每相有 $2p$ 个极相组,每个极相组有 $q$ 个线圈。设 $E_{qv}$ 为一个极相组 $v$ 次谐波的合成电动势,则:

$$\dot{E}_{qv(A\text{相带}k)} = \dot{E}_{qv(A\text{相带}1)} \times 1 \angle (k-1) \cdot v \cdot 360^\circ = \dot{E}_{qv(A\text{相带}1)} \quad (7)$$

$$\dot{E}_{qv(X\text{相带}k)} = \dot{E}_{qv(A\text{相带}k)} \times 1 \angle v \cdot 180^\circ \stackrel{v \text{ 为奇数}}{=} \dot{E}_{qv(A\text{相带}k)} \times 1 \angle 180^\circ = -\dot{E}_{qv(A\text{相带}k)} \quad (8)$$

式中: $k = 1, 2, \dots, p$ 。

这 $2p$ 个极相组既可以全部串联也可以先串后并,并联支路数设为 $a$ 。由于极间连线是反接,所以一相绕组 $v$ 次谐波的电动势 $E_{\varphi v}$ 为(设 $E_{\varphi v}$ 参考方向与 $E_{qv(A\text{相带}1)}$ 相同):

$$\dot{E}_{\varphi v} \stackrel{\text{利用式(7,8)}}{=} \frac{2p}{a} \dot{E}_{qv(A\text{相带}1)} \quad (9)$$

#### 1.3.2 双层波绕组

每相只有2个线圈组(N极绕组和S极绕组),每个线圈组有 $p$ 个极相组(这 $p$ 个极相组本身已串联在

一起),每个极相组也有  $q$  个线圈。这 2 个线圈组要么串联要么并联,支路数  $a$  最多等于 2。由于组间连线是反接,一相绕组  $E_{\varphi v}$  (设  $E_{\varphi v}$  参考方向与  $E_{qv(A相带1)}$  相同) 仍可以表达为:

$$E_{\varphi v} = \frac{2p}{a} E_{qv(A相带1)} \quad (10)$$

### 1.4 极相组合成电动势 $E_{qv}$

基波相邻两槽间的电角度为:

$$\alpha_1 = \frac{p \times 360^\circ}{Z_1} = \frac{p \times 360^\circ}{(2pm)} \stackrel{\text{代入式(2)}}{=} \frac{180^\circ}{mq} \quad (11)$$

$v$  次谐波相邻两槽间的电角度为:

$$\alpha_v = \frac{p_v \times 360^\circ}{Z_1} = \frac{(vp) \times 360^\circ}{Z_1} = v\alpha_1 = \frac{v \cdot 180^\circ}{mq} \quad (12)$$

由于一个极相组由  $q$  个线圈串联组成,每个线圈  $v$  次谐波的电动势有效值  $E_{cv}$  均相等,但相位均相差  $\alpha_v$  角,极相组的  $v$  次谐波合成电动势  $E_{qv}$  应为这  $q$  个线圈的  $v$  次谐波电动势相量的相量和,即:

$$E_{qv} = E_{cv} \angle 0^\circ + E_{cv} \angle \alpha_v + \dots + E_{cv} \angle (q-1) \cdot \alpha_v = E_{cv} \angle 0^\circ + E_{cv} \angle v\alpha_1 + \dots + E_{cv} \angle (q-1) \cdot v\alpha_1 \quad (13)$$

显然,只要能从(13)式中计算出一个极相组的合成电动势  $E_{qv}$ ,利用式(9)或式(10)即可算出一相的合成电动势  $E_{\varphi v}$ 。因此,下面将重点对一个极相组  $v$  次谐波电动势的相量合成过程进行分析。

## 2 极相组谐波电动势相量合成分析

### 2.1 相邻两槽间电角度 $\alpha_v$ 的区间划分

由(11)式知,  $0 < \alpha_1 = \pi/(mq) \leq \pi$  (这里  $m \geq 1, q \geq 1$ , 且  $m, q$  均为整数), 因此根据式(12)有:  $0 < \alpha_v = v\alpha_1 \leq v\pi$ 。值得注意的是,  $v$  的奇数性使得  $\alpha_v$  在  $(0, v\pi]$  内存在下列 3 类奇点:

(1) 周角的全部点: 若奇数  $v$  能被  $mq$  整除, 则  $v/(mq)$  必不为偶数, 因此  $\alpha_v = v\pi/(mq) \neq (2k+2)\pi$ , 即  $\alpha_v - 2k\pi \neq 2\pi, k = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k+3 \leq v$ ;

(2) 劣角的部分点:  $\alpha_v \neq [2k + (2l_1/q)]\pi$ , 即  $\alpha_v - 2k\pi \neq (2l_1/q)\pi, l_1 = 1, 2, 3, \dots$  且  $q > 2l_1; k = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k+1 \leq v$  (证明见 2.3.1 节情形四);

(3) 优角的部分点:  $\alpha_v \neq [2k+2 - (2l_2/q)]\pi$ , 即  $\alpha_v - 2k\pi \neq 2\pi - (2l_2/q)\pi, l_2 = 1, 2, 3, \dots$  且  $q > 2l_2; k = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k+3 \leq v$  (证明类同于劣角, 从略)。

因此,  $\alpha_v$  在  $(0, v\pi]$  内除去上述三类奇点外的任何

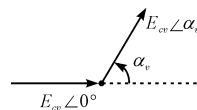
区间均有可能。随  $(\alpha_v - 2k\pi)$  与  $\pi$  大小关系的不同, 极相组  $q$  个线圈  $v$  次谐波电动势相量在相量图中按平移求和法则的走向亦不同。为此, 笔者把  $(0, v\pi]$  划分为 3 部分区间 (或点), 即:

(1) 劣角 (除去部分奇点):  $2k\pi < \alpha_v < (2k+1)\pi$ , 即  $0 < \alpha_v - 2k\pi < \pi, k = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k+1 \leq v$ ;

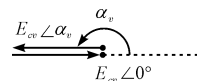
(2) 平角:  $\alpha_v = (2k+1)\pi$ , 即  $\alpha_v - 2k\pi = \pi, k = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k+1 \leq v$ ;

(3) 优角 (除去部分奇点):  $(2k+1)\pi < \alpha_v < (2k+2)\pi$ , 即  $\pi < \alpha_v - 2k\pi < 2\pi, k = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k+3 \leq v$ ;

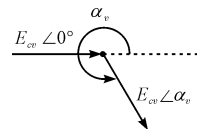
按首尾相连原则作出的相量示意图如图 1 所示。



(a)  $2k\pi < \alpha_v < (2k+1)\pi$  情形,  $k = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k+1 \leq v$



(b)  $\alpha_v = (2k+1)\pi$  情形,  $k = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k+1 \leq v$



(c)  $(2k+1)\pi < \alpha_v < (2k+2)\pi$  情形,  $k = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k+3 \leq v$

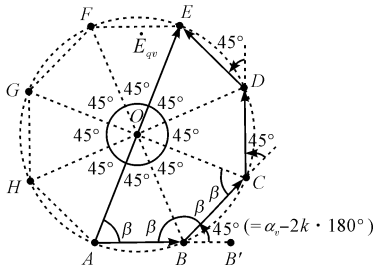
图 1  $v$  次谐波相邻两槽间电角度的区间划分

### 2.2 极相组相量合成新理论

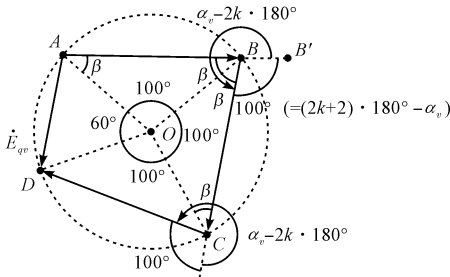
国内外学者之前的理论是“极相组  $q$  个电动势相量大小相等, 又依次移过  $\alpha_1$  电角度, 因此相加之后构成了正多边形的一部分, 而正多边形必有外接圆”, 这可以从  $360^\circ/\alpha_1 = 360^\circ/(180^\circ/(mq)) = 2mq$  恰好为整数边得到解释。

但是,  $q$  个相量两两之间相位差从基波  $\alpha_1 = 180^\circ/(mq)$  扩大到  $v$  次谐波  $\alpha_v = v \cdot 180^\circ/(mq)$  后,  $v$  的奇数性造成了  $360^\circ/(v \cdot 180^\circ/(mq))$  不能确保为整数, 即不一定能构成正多边形。

笔者提出如下结论:  $q$  个非零相量, 若每个相量的相位彼此均相差  $\alpha_v$  角,  $\alpha_v - 2k\pi \in (0, 2\pi)$  且  $\alpha_v - 2k\pi \neq \pi (k = 0, 1, 2, \dots)$ , 则无论  $\alpha_v - 2k\pi$  为劣角 [即  $\alpha_v - 2k\pi \in (0, \pi)$ ], 还是  $\alpha_v - 2k\pi$  为优角 [即  $\alpha_v - 2k\pi \in (\pi, 2\pi)$ ], 这  $q$  个相量按平移求和法则首尾相连后必有外接圆: 当  $\alpha_v - 2k\pi$  为劣角时, 每个相量对应的圆心角均为  $\alpha_v - 2k\pi$ , 如图 2(a) 所示; 当  $\alpha_v - 2k\pi$  为优角时, 每个相量对应的圆心角均为  $(2k+2)\pi - \alpha_v$ , 如图 2(b) 所示。



(a)  $\alpha_v - 2k \cdot 180^\circ$  为劣角时的情形



(b)  $\alpha_v - 2k \cdot 180^\circ$  为优角时的情形

图 2 极相组  $v$  次谐波电动势相量合成的几何原理

图 2(a,b) 分别以  $v = 3, q = 4, \alpha_v - 2k\pi = \pi/4$  和  $v = 13, q = 3, \alpha_v - 2k\pi = 13\pi/9$  为例绘制。

证明:(1) 当  $\alpha_v - 2k\pi$  为劣角时, 即  $\alpha_v - 2k\pi \in (0, \pi)$ , 则  $\angle ABC = \pi - (\alpha_v - 2k\pi) \in (0, \pi)$ , 因此点 A、B、C 不共线, 如图 2(a) 所示; 当  $\alpha_v - 2k\pi$  为优角时, 即  $\alpha_v - 2k\pi \in (\pi, 2\pi)$ , 则  $\angle ABC = (\alpha_v - 2k\pi) - \pi \in (0, \pi)$ , 因此点 A、B、C 不共线, 如图 2(b) 所示。

过不共线 3 点 A、B、C 作  $\odot O$ , 连接 OA、OB、OC、OD:

$$\left. \begin{aligned} OB = OC &\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB \\ \angle ABC = \angle BCD = \pi - (\alpha_v - 2k\pi) &\Rightarrow \angle OBA = \angle OCD \\ &OB = OC \\ &BA = CD \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow \triangle OBA \cong \triangle OCD \Rightarrow OA = OD \Rightarrow$  点 D 在  $\odot O$  上。

同理, 点 E、F、G... (如果有的话) 在  $\odot O$  上。

亦即  $q$  个等相位差且相位差不为  $(2k + 1)\pi$  的非零相量按平移求和法则首尾相连后必有外接圆。

(2) 易知每个相量和圆心 O 所形成的三角形均为等腰三角形, 根据三角形全等 SSS 公理, 这些三角形又是全等三角形, 如图 2 所示。所以  $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \beta$

$$\left. \begin{aligned} \angle OBA + \angle OBC + \angle B'BC &= 2\beta + \angle B'BC = \pi \\ \angle OAB + \angle OBA + \angle AOB &= 2\beta + \angle AOB = \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle B'BC = \angle AOB \text{ (相量对应的圆心角)}.$$

当  $\alpha_v - 2k\pi$  为劣角时,  $\angle B'BC = \alpha_v - 2k\pi$ , 亦即每个相量对应的圆心角均为  $\alpha_v - 2k\pi$ ; 当  $\alpha_v - 2k\pi$  为优角时,  $\angle B'BC = 2\pi - (\alpha_v - 2k\pi) = (2k + 2)\pi - \alpha_v$ , 亦即每个相量对应的圆心角均为  $(2k + 2)\pi - \alpha_v$ 。证毕。

### 2.3 相量合成研究

下面应用相量合成新理论, 并划分区间分别探讨极相组  $q$  个线圈  $v$  次谐波电动势的相量合成:

(1) 相邻两槽间两个线圈  $v$  次谐波电动势相量限定为  $(0, 2\pi)$  的相位差  $\alpha_v - 2k\pi$  是劣角、平角还是优角;

(2) 当  $\alpha_v - 2k\pi$  为劣角时, 极相组  $q$  个线圈  $v$  次谐波电动势所对圆心角的总和  $q(\alpha_v - 2k\pi)$  的角度区间; 当  $\alpha_v - 2k\pi$  为优角时, 同样圆心角的总和  $q[(2k + 2)\pi - \alpha_v]$  的角度区间; 当  $\alpha_v - 2k\pi$  为平角时, 则不划分子区间。

#### 2.3.1 $\alpha_v - 2k\pi$ 为劣角的情形

此时  $0 < \alpha_v - 2k\pi < \pi (k = 0, 1, 2, \dots)$ , 分别讨论如下:

情形一: 若  $0 < q(\alpha_v - 2k\pi) < \pi$ , 即  $0 < \alpha_v - 2k\pi < \pi/q$ , 如图 3 所示 (图中  $v = 3, q = 2, \alpha_v - 2k\pi = \pi/6$ )。

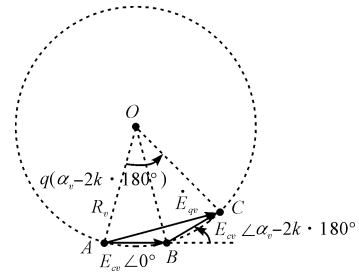


图 3  $0^\circ < \alpha_v - 2k \cdot 180^\circ < 180^\circ$  且  $0^\circ < q(\alpha_v - 2k \cdot 180^\circ) < 180^\circ$  时的  $E_{qv}$

性质判定:  $\alpha_v - 2k\pi$  当  $q \geq 2$  时只能为锐角。

合成过程分析: 由 2.2 节知,  $q$  个等相位差的线圈  $v$  次谐波电动势非零相量首尾相连后必有外接圆, 画出此外接圆, 并确定圆心 O。每个线圈对应相量所对的圆心角均为  $\alpha_v - 2k\pi$ ;  $q$  个线圈的合成电动势  $E_{qv}$  所对圆心角为  $q(\alpha_v - 2k\pi)$ , 因此,  $q$  个线圈合成电动势有效值为:

$$E_{qv} = 2R_v \sin \frac{q(\alpha_v - 2k\pi)}{2} = (-1)^{qk} 2R_v \sin \frac{q\alpha_v}{2} \quad (14)$$

式中:  $R_v$ — 外接圆的半径,  $R_v = \frac{E_{cv}}{2\sin \left[ \frac{(\alpha_v - 2k\pi)}{2} \right]} =$

$$\frac{E_{cv}}{(-1)^k 2\sin \left( \frac{\alpha_v}{2} \right)} \quad (15)$$

将  $R_v$  代入式(14), 可得:

$$E_{qv} = (-1)^{(q-1)k} E_{cv} \frac{\sin \left( \frac{q\alpha_v}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\alpha_v}{2} \right)} =$$

$$qE_{cv} \left[ (-1)^{(q-1)k} \frac{\sin \left( \frac{q\alpha_v}{2} \right)}{q\sin \left( \frac{\alpha_v}{2} \right)} \right] = qE_{cv} k_{dv} \quad (16)$$

式中:  $qE_{cv}$ — $q$  个线圈  $v$  次谐波电动势的代数和;  $k_{dv}$ —绕组的  $v$  次谐波分布因数。

$k_{dv}$  为:

$$k_{dv} = (-1)^{(q-1)k} \frac{\sin\left(\frac{q\alpha_v}{2}\right)}{q\sin\left(\frac{\alpha_v}{2}\right)} \quad (17)$$

由于  $N_c$  匝短距线圈  $v$  次谐波电动势的有效值  $E_{cv} = 4.44f_v N_c \Phi_v k_{pv}$  (参见文献[3]), 将其代入式(16), 可得极相组  $v$  次谐波电动势有效值:

$$E_{qv} = 4.44f_v (qN_c) \Phi_v k_{pv} k_{dv} = 4.44f_v (qN_c) \Phi_v k_{wv} \quad (18)$$

式中:  $qN_c$ — $q$  个线圈的总串联匝数;  $k_{wv}$ —整个绕组的  $v$  次谐波绕组因数,  $k_{wv} = k_{pv} \times k_{dv}$ 。

情形二: 若  $q(\alpha_v - 2k\pi) = \pi$ , 即  $\alpha_v = 2k\pi + (1/q)\pi$ , 如图 4 所示(图中  $v = 15, q = 2, \alpha_v - 2k\pi = \pi/2$ )。

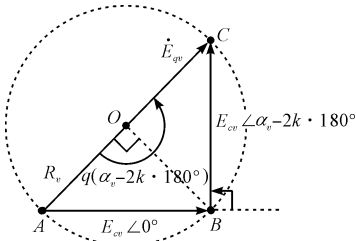


图 4  $0^\circ < \alpha_v - 2k \cdot 180^\circ < 180^\circ$  且  $q(\alpha_v - 2k \cdot 180^\circ) = 180^\circ$  时的  $E_{qv}$

性质判定: (1)  $q \geq 2$ ; (2)  $\alpha_v - 2k\pi$  可为锐角 [ $q \geq 3$ , 如图 2(a) 所示] 和直角 ( $q = 2$ )。

合成过程分析, 合成电动势有效值为:

$$E_{qv} = 2R_v \frac{\text{代入式(15)}}{(-1)^k \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2q}\right)} = qE_{cv} \cdot \frac{1}{q\sin\left(\frac{\pi}{2q}\right)}, \text{即:}$$

$$k_{dv} = \frac{1}{q\sin\left(\frac{\pi}{2q}\right)} \quad (19)$$

验证式(17) 对情形二的适用性: 将  $\alpha_v = 2k\pi + (1/q)\pi$  代入式(17), 有:

$$k_{dv} = (-1)^{(q-1)k} \frac{\sin[qk\pi + (1/2)\pi]}{q\sin[k\pi + (1/2q)\pi]} = \frac{1}{q\sin[(1/2q)\pi]}$$

结论: 适用。

情形三: 若  $\pi < q(\alpha_v - 2k\pi) < 2\pi$ , 即  $\pi/q < \alpha_v - 2k\pi < 2\pi/q$ , 如图 5 所示(图中  $v = 5, q = 4, \alpha_v - 2k\pi = 5\pi/12$ )。

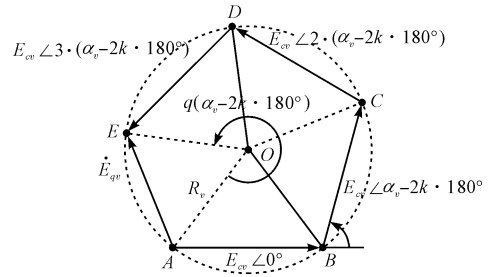


图 5  $0^\circ < \alpha_v - 2k \cdot 180^\circ < 180^\circ$  且  $180^\circ < q(\alpha_v - 2k \cdot 180^\circ) < 360^\circ$  时的  $E_{qv}$

性质判定: (1)  $q \geq 2$ ; (2)  $\alpha_v - 2k\pi$  可为锐角 ( $q \geq 4$ ) 和钝角 ( $q = 2, 3$ )。

合成过程分析, 合成电动势有效值为:

$$E_{qv} = 2R_v \sin \frac{2\pi - q(\alpha_v - 2k\pi)}{2} \quad \text{代入式(15)}$$

$$\frac{2E_{cv} \sin\left[(qk + 1)\pi - \frac{q\alpha_v}{2}\right]}{(-1)^k 2\sin\left(\frac{\alpha_v}{2}\right)} = qE_{cv} \left[ \frac{(-1)^{(q-1)k} \sin\left(\frac{q\alpha_v}{2}\right)}{q\sin\left(\frac{\alpha_v}{2}\right)} \right],$$

即:

$$k_{dv} = (-1)^{(q-1)k} \frac{\sin\left(\frac{q\alpha_v}{2}\right)}{q\sin\left(\frac{\alpha_v}{2}\right)} \quad (20)$$

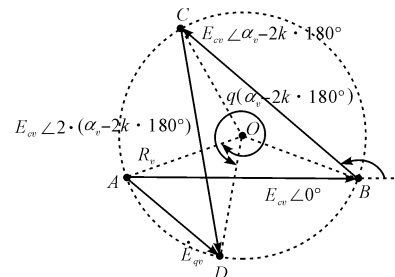
情形四: 若  $q(\alpha_v - 2k\pi) = 2\pi$  (此时必有  $q > 2$ ), 即  $\alpha_v = 2k\pi + (2/q)\pi$ , 属于 2.1 节所述劣角中的奇点情形, 因此这种情形不存在。下面用反证法证明一般结论, 即:

$$q(\alpha_v - 2k\pi) \neq 2l_1\pi, \text{ 或 } \alpha_v - 2k\pi \neq (2l_1/q)\pi, \quad l_1 = 1, 2, 3, \dots \text{ 且 } q > 2l_1 \quad (21)$$

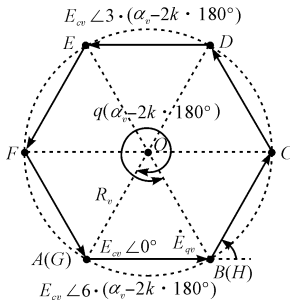
证明: 假设  $\alpha_v - 2k\pi = (2l_1/q)\pi$ ,  $\therefore 0 < \alpha_v - 2k\pi < \pi$ , 即  $0 < (2l_1/q)\pi < \pi$ ,  $\therefore 0 < 2l_1 < q$

又  $\alpha_v - 2k\pi = v\pi/(mq) - 2k\pi$ ,  $\therefore v\pi/(mq) - 2k\pi = (2l_1/q)\pi$ , 即  $v = 2kmq + 2l_1m$  为偶数, 这与  $v$  为奇数矛盾, 故假设不成立, 式(21) 成立。证毕。

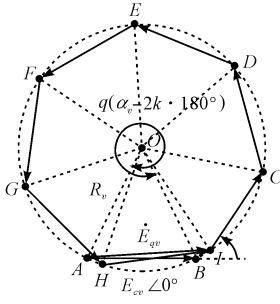
情形五: 若  $2\pi < q(\alpha_v - 2k\pi) < 3\pi$ , 即  $2\pi/q < \alpha_v - 2k\pi < 3\pi/q$ , 如图 6(a ~ c) 所示[图中分别为  $v = 7, q = 3, \alpha_v - 2k\pi = 7\pi/9; v = 7, q = 7, \alpha_v - 2k\pi = \pi/3; v = 7, q = 8, \alpha_v - 2k\pi = 7\pi/24$ ]。



(a)  $(q - 1)(\alpha_v - 2k \cdot 180^\circ) < 360^\circ$  情形



(b)  $(q - 1)(\alpha_v - 2k \cdot 180^\circ) = 360^\circ$  情形



(c)  $(q - 1)(\alpha_v - 2k \cdot 180^\circ) > 360^\circ$  情形

图 6  $0^\circ < \alpha_v - 2k \cdot 180^\circ < 180^\circ$  且  $360^\circ < q$

$(\alpha_v - 2k \cdot 180^\circ) < 540^\circ$  时的  $E_{qv}$

图 6(a) 中  $E_{qv}$  求解三角形为  $\triangle AOD$ , 图 6(b) 中为  $\triangle AOH$ , 图 6(c) 中为  $\triangle AOI$ 。

性质判定: (1)  $q \geq 3$ ; (2)  $q(\alpha_v - 2k\pi) - 2\pi \in (0, \pi)$ 。

(a) 若  $(q - 1)(\alpha_v - 2k\pi) < 2\pi$ , 必有  $\pi/(q - 1) < \alpha_v - 2k\pi < 2\pi/(q - 1)$ 。

性质判定: (1)  $\frac{2\pi}{q} < \alpha_v - 2k\pi < \frac{2\pi}{q - 1}$ ; (2)  $m = 3$  时,

$q \leq 6$ ; (3)  $\alpha_v - 2k\pi$  可为锐角 ( $q = 5, 6$ ) 和钝角 ( $q = 3, 4$ )。

(b) 若  $(q - 1)(\alpha_v - 2k\pi) = 2\pi$ , 即  $\alpha_v - 2k\pi = 2\pi/(q - 1)$

性质判定:  $m = 3$  时,  $q \equiv 7$ , 此时  $v = 7(6k + 1)$ ,  $\alpha_v - 2k\pi \equiv \pi/3$  (锐角)。

(c) 若  $(q - 1)(\alpha_v - 2k\pi) > 2\pi$ , 必有  $2\pi/(q - 1) < \alpha_v - 2k\pi < 3\pi/(q - 1)$

性质判定: (1)  $\frac{2\pi}{q - 1} < \alpha_v - 2k\pi < \frac{3\pi}{q}$ ; (2)  $m = 3$

时,  $q \geq 8$ ; (3)  $\alpha_v - 2k\pi$  只能为锐角。

图 6(a ~ c) 合成过程分析: 当  $2\pi < q(\alpha_v - 2k\pi) < 3\pi$  时, 无论  $(q - 1)(\alpha_v - 2k\pi) < 2\pi$ 、 $= 2\pi$ 、 $> 2\pi$ , 合成电动势有效值可以统一计算:

$$E_{qv} = 2R_v \sin \frac{q(\alpha_v - 2k\pi) - 2\pi}{2} \frac{\text{代入式(15)}}{2}$$

$$= \frac{2E_{cv} \sin[(qk + 1)\pi - q\alpha_v/2]}{(-1)^k 2\sin(\alpha_v/2)} = qE_{cv} \left[ (-1)^{(q-1)k+1} \frac{\sin(q\alpha_v/2)}{q\sin(\alpha_v/2)} \right],$$

即:

$$k_{dv} = (-1)^{(q-1)k+1} \frac{\sin(q\alpha_v/2)}{q\sin(\alpha_v/2)} \quad (22)$$

情形六: 若  $q(\alpha_v - 2k\pi) = 3\pi$ , 即  $\alpha_v = 2k\pi + (3/q)\pi$ , 如图 7 所示 (图中  $v = 9, q = 4, \alpha_v - 2k\pi = 3\pi/4$ )。

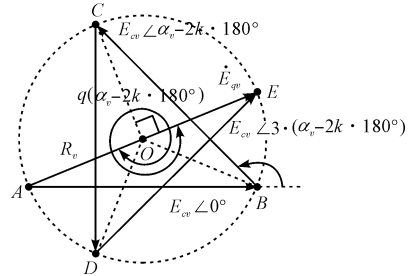


图 7  $0^\circ < \alpha_v - 2k \cdot 180^\circ < 180^\circ$  且

$q(\alpha_v - 2k \cdot 180^\circ) = 540^\circ$  时的  $E_{qv}$

性质判定: (1)  $q \geq 4$ ; (2)  $\alpha_v - 2k\pi$  可为锐角 ( $q \geq 7$ )、直角 ( $q = 6$ ) 和钝角 ( $q = 4, 5$ )。

合成过程分析, 合成电动势有效值:

$$E_{qv} = 2R_v \frac{\text{代入式(15)}}{(-1)^k \sin[k\pi + (3/2)q\pi]} =$$

$$qE_{cv} \cdot \frac{1}{q\sin[(3/2)q\pi]}, \text{ 即}$$

$$k_{dv} = \frac{1}{q\sin[(3/2)q\pi]} \quad (23)$$

验证式 (22) 对情形六的适用性: 将  $\alpha_v = 2k\pi + (3/q)\pi$  代入式 (22), 有:

$$k_{dv} = (-1)^{(q-1)k+1} \frac{\sin[qk\pi + (3/2)\pi]}{q\sin[k\pi + (3/2)q\pi]} =$$

$$\frac{1}{q\sin[(3/2)q\pi]}, \text{ 结论: 适用。}$$

情形七: 若  $3\pi < q(\alpha_v - 2k\pi) < 4\pi$ , 即  $3\pi/q < \alpha_v - 2k\pi < 4\pi/q$ , 如图 8 所示 (图中  $v = 11, q = 6, \alpha_v - 2k\pi = 11\pi/18$ )。

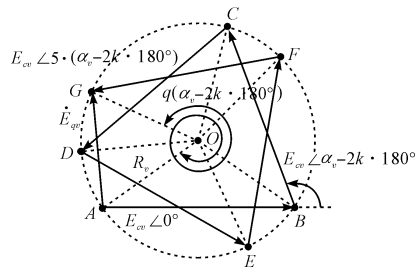


图 8  $0^\circ < \alpha_v - 2k \cdot 180^\circ < 180^\circ$  且  $540^\circ < q$

$(\alpha_v - 2k \cdot 180^\circ) < 720^\circ$  时的  $E_{qv}$

性质判定: (1)  $q \geq 4$ ; (2)  $\alpha_v - 2k\pi$  可为锐角 ( $q \geq 8$ ) 和钝角 ( $q = 4, 5, 6, 7$ )。

合成过程分析, 合成电动势有效值:

$$E_{qv} = 2R_v \sin \frac{4\pi - q(\alpha_v - 2k\pi)}{2} \frac{\text{代入式(15)}}{2}$$

$$= \frac{2E_{cv} \sin[(qk + 2)\pi - \frac{q\alpha_v}{2}]}{(-1)^k 2\sin(\frac{\alpha_v}{2})} = qE_{cv} \left[ (-1)^{(q-1)k+1} \frac{\sin(\frac{q\alpha_v}{2})}{q\sin(\frac{\alpha_v}{2})} \right],$$

即

$$k_{dv} = (-1)^{(q-1)k+1} \frac{\sin\left(\frac{q\alpha_v}{2}\right)}{q\sin\left(\frac{\alpha_v}{2}\right)} \quad (24)$$

情形八:若  $q(\alpha_v - 2k\pi) = 4\pi$  (此时必有  $q > 4$ ), 即  $\alpha_v = 2k\pi + (4/q)\pi$ , 属于 2.1 节所述劣角中的奇点情形, 因此这种情形不存在。

【 $k_{dv}$  表达式归纳】: 当  $0 < \alpha_v - 2k\pi < \pi$  时,

若  $0 < q(\alpha_v - 2k\pi) < 2\pi$ , 则  $k_{dv} = (-1)^{(q-1)k} \cdot \frac{\sin(q\alpha_v/2)}{q\sin(\alpha_v/2)}$  (情形 ① ~ ④);

若  $2\pi < q(\alpha_v - 2k\pi) < 4\pi$ , 则  $k_{dv} = (-1)^{(q-1)k+1} \cdot \frac{\sin(q\alpha_v/2)}{q\sin(\alpha_v/2)}$  (情形 ⑤ ~ ⑧);

同理可证, 若  $4\pi < q(\alpha_v - 2k\pi) < 6\pi$ , 则  $k_{dv} = (-1)^{(q-1)k+2} \frac{\sin(q\alpha_v/2)}{q\sin(\alpha_v/2)}$

.....

依次类推, 可证得: 若  $2n\pi < q(\alpha_v - 2k\pi) < (2n +$

$$2)\pi$$
, 则  $k_{dv} = (-1)^{(q-1)k+n} \frac{\sin\left(\frac{q\alpha_v}{2}\right)}{q\sin\left(\frac{\alpha_v}{2}\right)} \quad (25)$

式中:  $k = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k + 1 \leq v$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k + (2n + 2)/q \leq v$ 。

### 2.3.2 $\alpha_v - 2k\pi$ 为优角的情形

此时  $\pi < \alpha_v - 2k\pi < 2\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), 则每个线圈  $v$  次谐波电动势相量所对圆心角均为  $(2k + 2)\pi - \alpha_v \in (0, \pi)$ , 采用与 2.3.1 节相同的方法可证得:

当  $\pi < \alpha_v - 2k\pi < 2\pi$  时, 若  $2n'\pi < q[(2k + 2)\pi - \alpha_v] < (2n' + 2)\pi$ , 则:

$$k_{dv} = (-1)^{(q-1)(k+1)-n'} \frac{\sin(q\alpha_v/2)}{q\sin\left(\frac{\alpha_v}{2}\right)} \quad (26)$$

式中:  $k = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k + 3 \leq v$ ;  $n' = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k + 2 - 2n'/q \leq v$ 。

### 2.3.3 $\alpha_v - 2k\pi$ 为平角的情形

此时  $\alpha_v - 2k\pi = \pi$  或  $\alpha_v = (2k + 1)\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), 如图 9 所示。

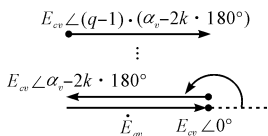


图 9  $\alpha_v - 2k \cdot 180^\circ = 180^\circ$  时的  $E_{qv}$

性质判定:  $\because \alpha_v = v\pi/(mq) = (2k + 1)\pi$ , 即奇数  $v$  能被  $mq$  整除,  $\therefore q$  必为奇数。

合成过程分析: 合成电动势有效值  $E_{qv} = E_{cv} =$

$$qE_{cv} \cdot \frac{1}{q}, \text{ 即 } k_{dv} = \frac{1}{q} \quad (27)$$

## 3 新旧分布因数公式的对比与验证

### 3.1 新旧公式对比

现有的谐波电动势分布因数公式为:

$$k_{dv} = \frac{\sin\left(\frac{q\alpha_v}{2}\right)}{q\sin\left(\frac{\alpha_v}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{vq\alpha_1}{2}\right)}{q\sin\left(\frac{v\alpha_1}{2}\right)} \quad (28)$$

不难发现: 当  $(2k_1 + 1)\pi < \frac{vq\alpha_1}{2} < (2k_1 + 2)\pi$  和

$(2k_2 + 1)\pi < \frac{v\alpha_1}{2} < (2k_2 + 2)\pi$  ( $k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots$ ) 两个不等式中有且仅有一个成立时, 运用上式计算时结果

为负。因  $k_{dv}$  出现负值 ( $f_v, N_c, \Phi_v$  不会出现负值), 用极相组  $v$  次谐波电动势有效值  $E_{qv}$  计算式 (18), 计算时结果必为负 (这是不可能的)。因此, 现有公式存在明显的缺陷, 如不加辨别, 直接代入分布绕组相电动势和线电动势的相量计算, 会出现与实际相位反相的严重错误。

为此, 经过详细分析并经完全归纳, 可得出了新的谐波电动势分布因数公式:

$$k_{dv} = \begin{cases} (-1)^{(q-1)k+n} \frac{\sin\left(\frac{q\alpha_v}{2}\right)}{q\sin\left(\frac{\alpha_v}{2}\right)} = (-1)^{(q-1)k+n} \frac{\sin\left(\frac{vq\alpha_1}{2}\right)}{q\sin\left(\frac{v\alpha_1}{2}\right)} & \text{式中: } 2k\pi < \alpha_v < (2k + 1)\pi, \text{ 即 } \alpha_v - 2k\pi \text{ 为劣角, } \\ & n \text{ 依下式确定: } 2n\pi < q(\alpha_v - 2k\pi) < (2n + 2)\pi; \\ & = \frac{1}{q} \\ & \text{式中: } \alpha_v = (2k + 1)\pi, \text{ 即 } \alpha_v - 2k\pi \text{ 为平角, 且 } q \text{ 只} \\ & \text{为奇数;} \\ (-1)^{(q-1)(k+1)-n'} \frac{\sin\left(\frac{q\alpha_v}{2}\right)}{q\sin\left(\frac{\alpha_v}{2}\right)} = (-1)^{(q-1)(k+1)-n'} \frac{\sin\left(\frac{vq\alpha_1}{2}\right)}{q\sin\left(\frac{v\alpha_1}{2}\right)} & \text{式中: } (2k + 1)\pi < \alpha_v < (2k + 2)\pi, \text{ 即 } \alpha_v - 2k\pi \text{ 为} \\ & \text{优角, } n' \text{ 依下式确定: } 2n'\pi < q[(2k + 2)\pi - \alpha_v] < \\ & (2n' + 2)\pi. \end{cases} \quad (29)$$

式中:  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k + (2n + 2)/q \leq v$ ;  $n' = 0, 1, 2, \dots$  且  $2k + 2 - 2n'/q \leq v$ 。

### 3.2 新旧公式 $q \rightarrow \infty$ 时的形式比较

$m = 3$  时,  $\alpha_v = v\pi/(mq) = v\pi/(3q), \alpha_v/2 = v\pi/(6q)$ ; 当  $q \rightarrow \infty$  时, 此时  $v\pi/(6q) \rightarrow 0$ , 有:

$$(a) \lim_{q \rightarrow \infty} \alpha_v = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{v\pi}{3q} = 0,$$

$$(b) \lim_{v\pi/(6q) \rightarrow 0} \frac{\sin(q\alpha_v/2)}{q\sin(\alpha_v/2)} = \lim_{v\pi/(6q) \rightarrow 0} \frac{\sin(v\pi/6)}{q\sin(v\pi/6q)} = \lim_{v\pi/(6q) \rightarrow 0} (-1)^n \frac{\sin(q\alpha_v/2)}{q\sin(\alpha_v/2)} = (-1)^n \frac{\sin(v\pi/6)}{v\pi/6};$$

$$\frac{\sin(v\pi/6)}{v\pi/6},$$

现有分布因数公式形式为:  $\lim_{q \rightarrow \infty} k_{dv} =$

由(a)可知:当  $q \rightarrow \infty$  时  $\alpha_v$  无限趋近于 0 但  $\alpha_v > 0$ , 依据新的分布因数公式(29)劣角分支,有:  $k \equiv 0, n$  依下式确定:  $2n\pi < v\pi/3 < (2n+2)\pi$ , 所以当  $q \rightarrow \infty$  时,

$$\text{新的分布因数公式形式为: } \lim_{q \rightarrow \infty} k_{dv} \stackrel{k \equiv 0}{=} \frac{\sin(v\pi/6)}{v\pi/6}$$

$$\lim_{v\pi/(6q) \rightarrow 0} \frac{\sin(q\alpha_v/2)}{q\sin(\alpha_v/2)} = \frac{\sin(v\pi/6)}{v\pi/6}$$

### 3.3 新旧公式验证

运用现有与新的分布因数公式计算三相绕组  $k_{dv}$  的

结果分别如表(1,2) 所示。

表 1 现有分布因数公式  $k_{dv}$  计算值

谐波次数 $v$	每极每相槽数 $q$							
	2	3	4	5	6	7	8	$\infty$
1	0.966	0.960	0.958	0.957	0.956	0.956	0.956	0.955
3	0.707	0.667	0.653	0.647	0.644	0.642	0.641	0.637
5	0.259	0.218	0.205	0.200	0.197	0.196	0.194	0.191
7	-0.259	-0.177	-0.158	-0.149	-0.145	-0.143	-0.141	-0.136
9	-0.707	-0.333	-0.271	-0.247	-0.236	-0.229	-0.225	-0.212
11	-0.966	-0.177	-0.126	-0.109	-0.102	-0.097	-0.095	-0.087
13	-0.966	0.218	0.126	0.102	0.092	0.086	0.083	0.073
15	-0.707	0.667	0.271	0.200	0.173	0.159	0.150	0.127
17	-0.259	0.960	0.158	0.102	0.084	0.075	0.070	0.056
19	0.259	0.960	-0.205	-0.109	-0.084	-0.072	-0.066	-0.050

表 2 新的分布因数公式  $k_{dv}$  计算值

谐波次数 $v$	每极每相槽数 $q$							
	2	3	4	5	6	7	8	$\infty$
1	0.966	0.960	0.958	0.957	0.956	0.956	0.956	0.955
3	0.707	0.667	0.653	0.647	0.644	0.642	0.641	0.637
5	0.259	0.218	0.205	0.200	0.197	0.196	0.194	0.191
7	0.259*	0.177	0.158	0.149	0.145	0.143	0.141	0.136
9	0.707*	0.333**	0.271	0.247	0.236	0.229	0.225	0.212
11	0.966*	0.177*	0.126	0.109	0.102	0.097	0.095	0.087
13	0.966	0.218*	0.126*	0.102	0.092	0.086	0.083	0.073
15	0.707	0.667*	0.271*	0.200**	0.173	0.159	0.150	0.127
17	0.259	0.960*	0.158*	0.102*	0.084	0.075	0.070	0.056
19	0.259*	0.960	0.205*	0.109*	0.084*	0.072	0.066	0.050

1. 考虑到一些同步发电机空载电动势波形含有一定分量的 17 次和 19 次谐波,表中谐波次数  $v$  取到 19; 2. 表 2 中标 \* 者为公式(29) 优角分支计算值,标 \*\* 者为平角分支计算值,其余为劣角分支计算值

从表 1 和表 2 的计算结果对比可知:当  $v \geq 7$  之后,现有公式节距因数均出现了负值,而新的公式则全程未出现负值,后续计算电动势有效值时亦不会为负,符合实际。

## 4 结束语

针对现有谐波电动势分布因数公式计算电动势有

效值出现负值的问题,本文首先建立了分布绕组谐波合成电动势相量模型,根据谐波为奇次的特点提出了极相组相量合成几何原理的新理论,划分区间明确奇点后,应用该理论,并通过相量图分析,研究了  $v$  次谐波相邻两槽间夹角  $\alpha_v - 2k\pi$  分别为劣角、平角和优角时极相组  $q$  个线圈谐波电动势的相量合成(主要关注合成电动势中的分布因数),通过完全归纳,提出了一



个对应于  $\alpha_v - 2k\pi$  分别为劣角、平角和优角的3分段新分布因数公式,并给出了  $q \rightarrow \infty$  的极限形式;其次,选取了三相绕组  $q = 2, \dots, 8, \infty$  分别对新旧公式各次谐波进行了数据验证,考虑到一些同步发电机空载电动势波形含有一定分量的17次和19次谐波,验证时截取了1~19次奇次谐波。

验证结果表明:与现有公式当  $v \geq 7$  之后均出现负值不同,新的公式全程未出现负值,说明新公式与实际情况吻合,可替代现有公式使用。

### 参考文献 (References):

[1] 天津电气传动设计研究所. 电气传动自动化技术手册[M]. 3版. 北京:机械工业出版社,2011.

[2] GB/T 14549—1993. 电能质量公用电网谐波[S]. 北京:中国标准出版社,1994.

[3] 龙飞,蒋伟,徐敏伟. 交流电机谐波电动势节距因数出现负值的分析和处理[J]. 机电工程,2017,34(6):603-608.

[4] 马云鹏. 绕组分布系数的分析与计算[J]. 中小型电机,1991(3):24-27.

[5] 程小华. 交流电机绕组分布系数推导方法的研究[J]. 防爆电机,2010,45(5):1,10.

[6] 于吉坤,李立毅,陈启明,等. 高速永磁同步电机线圈与绕组磁极磁场计算方法及其内在联系[J]. 电工技术学报,2017,32(12):185-196.

[7] LIWSCHITZ M M. Distribution factors and pitch factors of the harmonics of a fractional-slot winding[J]. **Electrical Engineering**, 1943,62(10):664-666.

[8] KOSTENKO M, PIOTROVSKY L. Electrical machines: volume II [M]. Translated from the Russian by CHERNUKHIN A. 3rd ed. Moscow: Mir Publishers, 1974.

[9] CHAPMAN S J. Electric machinery fundamentals [M]. 5th ed. New York: McGraw-Hill, 2012.

[10] UMANS S D, FITZGERALD A E, KINGSLEY C. Fitzgerald & kingsley's electric machinery [M]. 7th ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2013.

[11] 汤蕴璆. 电机学[M]. 5版. 北京:机械工业出版社,2014.

[编辑:张豪]

### 本文引用格式:

龙飞,蒋伟,徐敏伟,等. 交流电机谐波电动势分布因数出现负值的分析研究[J]. 机电工程,2018,35(10):1085-1093.

LONG Fei, JIANG Wei, XU Minwei, et al. Analysis of negative values appearing in the calculation of the harmonic electromotive force distribution factor of AC machines[J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2018,35(10):1085-1093. 《机电工程》杂志;http://www.meem.com.cn

(上接第1076页)

[4] 杨国凯. 振动载荷对滚动轴承失效行为与寿命影响的研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学机械工程学院,2015.

[5] 马亚良,陈仁竹. 轴承制造技术[M]. 北京:清华大学出版社,2008.

[6] 周和珍. 四列圆柱滚子轴承[P]. 中国:CN202132379U,2012.

[7] 李爱君. 轴承内圈直滚道宽度测量方法[J]. 金属加工:2009(20):50-51.

[8] HASHIMOTO F, GALLEGO I, OLIVEIRA J F G, et al. Advances in centerless grinding technology [J]. **CIRP Annals-Manufacturing Technology**, 2012,61(2):747-770.

[9] JIN-SEOB K, EUN-SEONG L, YOON-GYO J. Determination of efficient superfinishing conditions for mirror surface finishing of titanium [J]. **Journal of Central South University**, 2012(1):155-162.

[10] UMEHARA N, KOMANDURI R. Magnetic fluid grinding of HIP-Si3N4 rollers[J]. **Wear**, 1996,192(1):85-93.

[11] 魏泽飞. 非均匀机械作用电化学机械加工技术关键问题研究[D]. 大连:大连理工大学机械工程学院,2013.

[12] 梁春. 新型控制方式在超薄片双面研磨抛光加工中的

应用——针对超薄蓝宝石片、蓝玻璃、石英片的加工解决方案[J]. 甘肃科技,2013,29(20):73-75.

[13] KLAMECKI B E. Comparison of material removal rate models and experimental results for the double-sided polishing process [J]. **Journal of Materials Processing Tech.**, 2001,109(3):248-253.

[14] 袁巨龙,袁哲俊,庞滔,等. 石英基片双面抛光加工的研究[J]. 金刚石与磨料磨具工程,1987,6(42):3-7.

[15] 姚蔚峰. 基于圆柱面加工轨迹均匀包络原理的高精度轴承圆柱滚子高一致性加工方法研究[D]. 杭州:浙江工业大学机械工程学院,2015.

[16] JIANG L, YAO W F, HE Y Y, et al. An experimental investigation of double-side processing of cylindrical rollers using chemical mechanical polishing technique [J]. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, 2016,82(1):523-534.

[17] JIANG L, HE Y Y, LUO J B. Chemical mechanical polishing of steel substrate using colloidal silica-based slurries [J]. **Applied Surface Science**, 2015,330(1):487-495.

[编辑:张豪]