DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2018.01.001

冗余机构 2URR-2RRU 运动学与性能分析

王中林1,张宁斌2

(1. 速波机器人无锡有限公司, 江苏无锡 214000; 2. 上海交通大学 机械与动力工程学院, 上海 200072)

摘要:针对实际运动控制对机构运动学分析及性能分析的依赖性问题,将并联机构运动分析方法应用到了新型并联机构 2URR-2RRU 中。首先运用了螺旋理论对机构自由度进行分析,采用矢量法对机构进行了位置分析,通过位置反解求解了相应的雅可比矩 阵,并对机构进行了奇异性分析,再利用 Matlab 空间数值搜索法对该并联机构进行了工作空间分析,最后采用 LTI 性能指标对该机 构的力/运动传递性能进行了分析。研究结果表明:该3自由度并联机构位置正解解析解难以求解,且该机构只存在反解奇异,其 工作空间在 Y 轴方向上的大小由机构末端尺寸决定;性能分析结果显示,该机构具有良好的力/运动传递性能,可为2URR-2RRU 并 联机构优化提供理论基础。

文章编号:1001-4551(2018)01-0001-09

Kinematics and performance analysis of redundantly-actuated parallel mechanism 2URR-2RRU

WANG Zhong-lin¹, ZHANG Ning-bin²

(1. Speedpro Robot Wuxi Co., Ltd., Wuxi 214000, China;2. School of Mechatronics Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200072, China)

Abstract: In order to solve the problem of the dependence of the control on kinematic and performance analysis, this paper presented kinematic and performance analysis of a redundantly actuated 2URR-2RRU parallel manipulator (PM). First, the mobility analysis was carried out based on the screw theory. Through the vector method, inverse and forward kinematic position models were established, which furthermore were utilized to form the velocity Jacobian matrix of the PM. After numerical search, the enveloped reachable workspace was obtained. At last, the kinematic performance quantified by the local force/motion transmission index (LTI) of the PM was evaluated. The results show that the 2URR-2RRU PM has three degrees of freedom (DOFs), including two rotation DOFs and one translation DOF. Since the analytical forward position kinematics is out of our scope, the numerical solutions are calculated. The singularity analysis based on the velocity Jacobian matrix shows that the PM has no inverse kinematic singularity and combined singularity except the forward kinematic singularity. Besides, the range of the workspace along the y direction depends on the length of the tool tip. Finally, the LTI atlas shows that the PM with designed link dimensions is of good force/motion transmissibility, which lays the foundation for the optimization of the 2URR-2RRU PM. **Key words**: parallel mechanism; kinematics; singularity analysis; workspace; LTI

0 引 言

与串联机器人相比,并联机器人具有精度高、刚度 大、误差小以及承载能力强等优势。与6自由度并联 机器人相比,少自由度并联机器人在系统设计制造、控 制、维护等方面能够有效地降低成本,因而,越来越受 到国际社会的广泛关注。但是常规并联机构存在难以 克服的缺点,例如:位置正解困难、工作空间小、运动控 制精度不高等。

冗余并联机构能够在不减弱非冗余并联机构优点

收稿日期:2017-01-22

作者简介:王中林(1989-),男,江苏连云港人,硕士研究生,主要从事工业机器人方面的研究。E-mail:wangzhonglin@speedpro.cn 通信联系人:张宁斌,男,博士研究生.E-mail: Zhangnb@sjtu.edu.cn

的基础上克服一些非冗余并联机构无法克服的缺点。 冗余的存在能减少并联机构奇异位型^[1-5],扩大工作空 间^[6-8],提高机构的整体刚度^[9-11]。MERLET^[12-13]指出 冗余的存在对运动学正解、奇异的规避、系统的控制以 及运动学标定等都具有一定的提高。

与常规并联机构的研究相比,对冗余驱动并联机 构系统的研究则比较少。冗余在并联机构中分为两 类^[14-16]:驱动冗余和运动冗余^[17]。运动冗余是通过添 加额外的驱动关节增加运动的自由度^[18];而驱动冗余 的引入只是增加了驱动关节,不会影响机构的自由度。 现有驱动冗余并联机构的实现方式主要有3种:在非 冗余并联机构的某些支链的被动关节处添加主动驱 动;在非冗余并联机构上添加具有主动驱动的运动学 支链;既驱动已有支链的被动关节,又添加带驱动的运 动学支链。

基于雅克比矩阵的局部条件指标(local condition index,LCI)由 GOSSELIN 和 ANGELES^[19]首次提出,用于并联机构运动学优化设计。之后,刘辛军^[20]首次提出了适用于并联机构的基于螺旋理论的 LTI,可以描述并联机构力/运动传递效率,具有与坐标系选取、量纲无关等特性,已被成功用于并联机构性能的分析和优化设计。

本研究将以 2URR-2RRU 为研究对象,首先运用 螺旋理论以及修正的 G-K 公式对该机构自由度进行 分析;接着通过并联机构的空间位姿关系建立机构位 置正反解关系式,并通过该关系式推导得到 2URR-2RRU 机构的雅克比矩阵,利用雅克比矩阵对机构进 行奇异分析^[21-26];然后结合该机构杆长条件、干涉现 象以及运动副条件限制,绘制出冗余并联机构 2URR-2RRU 的工作空间;最后探索 2URR-2RRU 机构传递性 能情况,利用 LIU^[27-28]提出的性能指标对该机构进行 力/运动传递性能的分析,以得出 LTI 性能图谱。

1 机构简介及坐标系建立

2URR-2RRU 并联机构如图 1 所示。



2URR-2RRU 并联机构整个机构由定平台、动 平台与4条分支运动链构成。整个机构对称分布, 分支1、2为两条相同支链,通过两个转动副(*R*)与 一个万向铰(*U*)顺次链接定平台与动平台,构成了 URR分支;分支3、4为两条相同支链,通过U铰与 两个 R 副顺次连接定平台和动平台,构成了 RRU 分支。整个机构的驱动部件是4个分支上中间的 转动副(*R*)。

2URR-2RRU 并联机构坐标系如图 2 所示。



图 2 2URR-2RRU 并联机构坐标系图

令 A_1B_1 为分支1, A_2B_2 为分支2, A_3B_3 为分支3, A_4B_4 为分支4。其中: $A_i(i = 1,2)$ —分支1、2与动平 台相连接的转动副中心点; $A_i(i = 3,4)$ —分支3、4 与动平台相连接的U铰中心点; $B_i(i = 1,2)$ —分支 1、2与定平台相连接的U铰中心点; $B_i(i = 3,4)$ —分 支3、4与动平台相连接的转动副中心点。本研究在机 架上建立定坐标系 O-XYZ,原点 O 位于 B_1B_2 连线中 点,为简化运动学模型,定义X 轴与 OB₄ 重合,Y 轴与 OB₂ 重合,Z 轴垂直向下。动坐标系 o – uvw 建立于动 平台上,o 点位于 A_1A_2 连线中点,u 轴与 oA₄ 重合,v 轴 与oA₂ 重合,w 轴竖直向下。四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 、 $B_1B_2B_3B_4$ 为正方形,即 oA₁ = oA₂ = oA₃ = oA₄、OB₁ = OB₂ = OB₃ = OB₄。

2 2URR-2RRU 并联机构自由度分析

本研究运用螺旋理论对 2URR-2RRU 并联机构的 各分支约束进行分析,建立在分支 1 上的分支坐标系 $B_1 - x_1y_1z_1$ 如图 3 所示。

分支1的运动螺旋系为:

$$\begin{cases} \$_{11} = (1,0,0;0,0,0) \\ \$_{12} = (0,1,0;0,0,0) \\ \$_{13} = (1,0,0;0,a_{13},b_{13}) \\ \$_{14} = (1,0,0;0,a_{14},b_{14}) \end{cases}$$
(1)



图 3 分支 1 运动螺旋及反螺旋

由约束螺旋与运动螺旋互易积为零,得到分支1 的约束螺旋为:

$$\begin{cases} \$_{11}^{r} = (0,0,0;0,0,1) \\ \$_{12}^{r} = (1,0,0;0,0,0) \end{cases}$$
(2)

式中: \$'₁₁ 一 垂直于定平台的一个力偶; \$'₁₂ 一 通过 U 副中心 B₁ 且与其中一个转动副轴线平行的一个力 线矢。

由于分支1、2完全相同且关于定平台上X轴对称 分布,分支2的约束螺旋与1相同,即:

$$\begin{cases} \$_{21}^{r} = (0,0,0;0,0,1) \\ \$_{22}^{r} = (1,0,0;0,0,0) \end{cases}$$
(3)

同理,可以求出分支3、4的约束螺旋为:

$$\begin{cases} \$_{31}^{r} = (0,0,0;0,0,1) \\ \$_{32}^{r} = (0,1,0;0,0,0) \\ \$_{41}^{r} = (0,0,0;0,0,1) \\ \$_{42}^{r} = (0,1,0;0,0,0) \end{cases}$$
(5)

由上述4条分支施加于动平台的4个约束力偶 方向相同,故整个机构存在一个公共约束,即 λ = 1。机构的阶数为6- λ = 5。又因为过 A_3 、 A_4 以及 B_1 、 B_2 的两个力线矢是平行的,等效于一个平行于 原方向的力线矢和一个垂直于定平台的力偶,在去 除一个公共约束的因素后,分支1、2以及分支3、4 还分别产生了一个力偶,故存在两个并联冗余约 束,即v = 2。

根据一般机构的通用自由度修正 G-K公式:

$$M = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^{g} f_i + v$$
 (6)

式中:M— 机构的自由度;d— 机构阶数;n— 总的构件数(包括机架);g— 总的运动副数; f_i — 第 i 个运动副的自由度;v— 并联机构冗余约束。

代入上式得: *M* = 5 × (10 - 12 - 1) + 4 × 4 + 2 = 3 (7) 即:2URR-2RRU并联机构在该位型下具有3个自 由度,分别是两个转动和一个移动。一条转动轴为 B₁B₂,一条转动轴为 oA₃,移动方向为 Oo 方向。

由此可知,动平台到定平台的旋转矩阵可以化 简为:

$$\boldsymbol{R}_{A}^{B} = \boldsymbol{R}_{Yu}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{R}_{Y}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{R}_{u}(\boldsymbol{\gamma}) = \begin{bmatrix} c\boldsymbol{\beta} & s\boldsymbol{\beta}s\boldsymbol{\gamma} & s\boldsymbol{\beta}c\boldsymbol{\gamma} \\ 0 & c\boldsymbol{\gamma} & -s\boldsymbol{\gamma} \\ -s\boldsymbol{\beta} & c\boldsymbol{\beta}s\boldsymbol{\gamma} & c\boldsymbol{\beta}c\boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}$$
(8)

3 2URR-2RRU 并联机构位置分析

3.1 位置反解

机构位置反解是指已知动平台位置和姿态 β 、 γ 、 z_0 ,求解驱动参数 θ_{13} 、 θ_{23} 、 θ_{32} 、 θ_{42} 的问题。各分支坐标系以及输入参数如图4所示。



图 4 各分支坐标系以及输入参数

由图 4 可以看出各分支待求参数,其中分支坐标系 建立原则为 x_1, x_2 轴线方向与万向铰中的一个转动副轴 线重合, y_1, y_2 轴与 B_1B_2 轴重合。令 $P = [x_0 \quad y_0 \quad z_0]^T$ 表示动坐标系的原点 o 在固定坐标系中的位置矢量。 机构相关尺寸定义如下: $oA_1 = oA_2 = oA_3 = oA_4 = e_1$; $OB_1 = OB_2 = OB_3 = OB_4 = e_2$ 。各分支中两两运动副 之间的杆长 l,计算过程中动平台上点 A_1, A_2, A_3, A_4 分 别用向量 b_1, b_2, b_3, b_4 来表示,则 b_1, b_2, b_3, b_4 在动坐标 系下的坐标为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_{1}^{A} = \begin{bmatrix} 0 & -e_{1} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}_{2}^{A} = \begin{bmatrix} 0 & e_{1} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}_{3}^{A} = \begin{bmatrix} -e_{1} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}_{4}^{A} = \begin{bmatrix} e_{1} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{cases}$$
(9)

利用旋转矩阵以及位置矢量 P 可得到 b_1 、 b_2 、 b_3 、 b_4 在固定坐标系下的坐标为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_{1} = \boldsymbol{R}_{A}^{B}\boldsymbol{b}_{1}^{A} + \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{b}_{2} = \boldsymbol{R}_{A}^{B}\boldsymbol{b}_{2}^{A} + \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{b}_{3} = \boldsymbol{R}_{A}^{B}\boldsymbol{b}_{3}^{A} + \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{b}_{4} = \boldsymbol{R}_{A}^{B}\boldsymbol{b}_{4}^{A} + \boldsymbol{P} \end{cases}$$
(10)

通过对机构的分析,向量 b₁、b₂、b₃、b₄在固定坐标 系下面的坐标可以通过另外一种方法求解出来,即利 用分支坐标系求解。从图4上可以看出,分支坐标系1、 2分别绕固定坐标系的Y轴转动 θ₁₁和 θ₂₁角度,分支坐 标系3、4的3个轴线方向与固定坐标系3个轴向方向 相同,可以得到分支1、2、3、4坐标系向固定坐标系的 旋转矩阵为:

$$\boldsymbol{R}_{1} = \begin{bmatrix} c\theta_{11} & 0 & -s\theta_{11} \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta_{11} & 0 & c\theta_{11} \end{bmatrix}$$
(11)

$$\boldsymbol{R}_{2} = \begin{bmatrix} c\theta_{21} & 0 & -s\theta_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta_{22} & 0 & c\theta_{22} \end{bmatrix}$$
(12)

$$\boldsymbol{R}_{3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(13)
$$\boldsymbol{R}_{4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(14)

分支坐标系 1、2、3、4 的原点在固定坐标系上的位置矢量分别为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_{1} = \begin{bmatrix} 0 & -e_{2} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{p}_{2} = \begin{bmatrix} 0 & e_{2} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{p}_{3} = \begin{bmatrix} -e_{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{p}_{4} = \begin{bmatrix} e_{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{cases}$$
(15)

向量 b_1 、 b_2 、 b_3 、 b_4 在分支坐标系 1、2、3、4 下面的 坐标分别为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_{1}^{1} = \begin{bmatrix} 0 & lc\theta_{12} + lc\theta_{13} & ls\theta_{12} + ls\theta_{13} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}_{2}^{2} = \begin{bmatrix} 0 & lc\theta_{22} + lc\theta_{23} & ls\theta_{22} + ls\theta_{23} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}_{3}^{3} = \begin{bmatrix} lc\theta_{31} + lc\theta_{32} & 0 & ls\theta_{31} + ls\theta_{32} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}_{4}^{4} = \begin{bmatrix} lc\theta_{41} - lc\theta_{42} & 0 & ls\theta_{41} + ls\theta_{42} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{cases}$$
(16)

通过上面的坐标转换可以得到 b_1 、 b_2 、 b_3 、 b_4 在固 定坐标系下面的坐标为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_{1} = \boldsymbol{R}_{1}\boldsymbol{b}_{1}^{1} + \boldsymbol{p}_{1} \\ \boldsymbol{b}_{2} = \boldsymbol{R}_{2}\boldsymbol{b}_{2}^{2} + \boldsymbol{p}_{2} \\ \boldsymbol{b}_{3} = \boldsymbol{R}_{3}\boldsymbol{b}_{3}^{3} + \boldsymbol{p}_{3} \\ \boldsymbol{b}_{4} = \boldsymbol{R}_{4}\boldsymbol{b}_{4}^{4} + \boldsymbol{p}_{4} \end{cases}$$
(17)

公式(10)与式(17)都表示同一点的位置矢量, 得到以下等式:

$$\begin{cases} s\theta_{11} (ls\theta_{12} + ls\theta_{13}) = e_1 s\beta s\gamma - x_0 \\ lc\theta_{12} + lc\theta_{13} = e_2 - e_1 c\gamma \\ c\theta_{11} (ls\theta_{12} + ls\theta_{13}) = -e_1 c\beta s\gamma + z_0 \\ s\theta_{21} (ls\theta_{22} + ls\theta_{23}) = -e_1 s\beta s\gamma - x_0 \\ lc\theta_{22} + lc\theta_{23} = -e_2 + e_1 c\gamma \\ c\theta_{21} (ls\theta_{22} + ls\theta_{23}) = e_1 c\beta s\gamma + z_0 \\ lc\theta_{31} + lc\theta_{32} = e_2 - e_1 c\beta + x_0 \\ ls\theta_{31} + ls\theta_{32} = e_1 s\beta + z_0 \\ lc\theta_{41} - lc\theta_{42} = e_1 c\beta - e_2 + x_0 \\ ls\theta_{41} + ls\theta_{42} = z_0 - e_1 s\beta \end{cases}$$
(18)

根据上述自由度分析结果以及机构在空间中的几 何关系可以得到: $y_0 = 0, x_0 = z_0 t \beta$,即 $P = (z_0 t \beta \ 0 \ z_0)$, 其中 t 表示 tan_0 因此可将式(18) 化简为:

$$\begin{cases} ls\theta_{12} + ls\theta_{13} = a_{1} \\ lc\theta_{12} + lc\theta_{13} = c_{1} \\ ls\theta_{22} + ls\theta_{23} = a_{2} \\ lc\theta_{22} + lc\theta_{23} = c_{2} \\ lc\theta_{31} + lc\theta_{32} = a_{3} \\ ls\theta_{31} + ls\theta_{32} = c_{3} \\ lc\theta_{41} - lc\theta_{42} = a_{4} \\ ls\theta_{41} + ls\theta_{42} = c_{4} \end{cases}$$
(19)

其中:

$$a_{1} = z_{0}sec\beta - e_{1}s\gamma$$

$$c_{1} = e_{2} - e_{1}c\gamma$$

$$a_{2} = z_{0}sec\beta + e_{1}s\gamma$$

$$c_{2} = -e_{2} + e_{1}c\gamma$$

$$a_{3} = e_{2} - e_{1}c\beta + z_{0}\tan\beta$$

$$c_{3} = e_{1}s\beta + z_{0}$$

$$a_{4} = e_{1}c\beta - e_{2} + x_{0}$$

$$c_{4} = z_{0} - e_{1}s\beta$$

利用 Matlab 符号工具箱对式(19) 求解,可得机构的位置反解为:

$$\begin{cases} \theta_{13} = 2 \operatorname{atan} \frac{2la_1 - \sqrt{(a_1^2 + c_1^2)(4l^2 - a_1^2 - c_1^2)}}{a_1^2 + c_1^2 + 2lc_1} \\\\ \theta_{23} = 2 \operatorname{atan} \frac{2la_2 - \sqrt{(a_2^2 + c_2^2)(4l^2 - a_2^2 - c_2^2)}}{a_2^2 + c_2^2 + 2lc_2} \\\\ \theta_{32} = 2 \operatorname{atan} \frac{2lc_3 - \sqrt{(a_3^2 + c_3^2)(4l^2 - a_3^2 - c_3^2)}}{a_3^2 + c_3^2 + 2la_3} \\\\ \theta_{42} = 2 \operatorname{atan} \frac{2lc_4 - \sqrt{(a_4^2 + c_4^2)(4l^2 - a_4^2 - c_4^2)}}{a_4^2 + c_4^2 + 2la_4} \end{cases}$$
(20)

3.2 位置正解

机构的位置正解即为已知机构的 3 个输入运动参数 θ_{13} 、 θ_{23} 、 θ_{32} 、 θ_{42} 求解动平台的位置参数 β 、 γ 、 z_0 。由式 (19) 可得:

$$a_1^2 + c_1^2 - 2a_1 ls\theta_{13} - 2c_1 lc\theta_{13} = 0$$
 (21)

$$a_2^2 + c_2^2 - 2a_2 ls\theta_{23} - 2c_2 lc\theta_{23} = 0$$
 (22)

$$a_3^2 + c_3^2 - 2a_3lc\theta_{32} - 2c_3ls\theta_{32} = 0$$
 (23)

$$a_4^2 + c_4^2 - 2a_4lc\theta_{42} - 2c_4ls\theta_{42} = 0$$
 (24)

对式(21,23)平方差后化简得:

$$f(\gamma) = z_0 sec\beta = \frac{u_4 + u_5 - 4e_1e_2c\gamma}{4e_1s\gamma + 2l(s\theta_{13} - s\theta_{23})} \quad (25)$$

其中:
$$u_4 = 2le_1 s\gamma(s\theta_{13} + s\theta_{23}),$$

 $u_5 = 2l(c\theta_{13} + c\theta_{23})(e_1 c\gamma - e_2)_{\circ}$
将 $f(\gamma)$ 代人式(21)中,消去 $z_0 sec\beta$:
 $f_1(\gamma) + f_2(\gamma) = 0$ (26)

该方程中只含有未知变量 γ,最终化简为关于变 量 γ 的一元八次方程,对该方程只能求出数值解,因此 2URR-2RRU并联机构的位置正解解析解很难求解,只 能给出数值解。

3.3 数值实例

如上所述,任意选取几组输入参数(θ_{13} 、 θ_{23} 、 θ_{32} 、 θ_{42})的数值,本文可以通过等式($21 \sim 24$)求解 出动平台的位置参数(β 、 γ 、 z_0)的数值。为了验证求 解正确性,本研究选取4组任意的输入参数,如表1 所示。

表1 机构输入参数

输入参数	$\theta_{13}/(\circ)$	$\theta_{_{23}}/(^{\circ})$	$\theta_{_{32}}/(^{\circ})$	$\theta_{_{42}}/(^{\circ})$
1	20	120	40	39.22
2	40	120	50	59.89
3	50	130	50	55.15
4	65	120	60	68.95

其中: $l = 400 \text{ mm}, e_1 = 250 \text{ mm}, e_2 = 400 \text{ mm}_{\circ}$

根据表1中4组参数值,代入到等式(21~24)中 可以得到并联机构动平台的输出参数,即位置正解的 数值解,如表2所示。

表2 机构输出参数

输出参数	β /(°)	γ/(°)	z_0/mm
1	12.40	30. 99	603.02
2	4.14	13.41	684.28
3	10. 28	0	880. 74
4	4.11	2.15	750. 75

4组正解构型如图5所示。



3.4 刀具末端坐标

刀具末端点至动坐标系原点的距离为 H,则动平 台上刀具端点在动坐标系下的位置坐标为: $d = [0 \ 0 \ H]^{T}$ 。因此,动平台上刀具端点在固定坐标系 下面的位置矢量为:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}_{A}^{B}\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} Hs\beta c\gamma + z_{0}t\beta \\ -Hs\gamma \\ Hc\beta s\gamma + z_{0} \end{bmatrix}$$
(27)

可以得到工具末端在定坐标系下坐标为:

$$\begin{cases}
H_{\chi} = H_{s}\beta c\gamma + z_{0}t\beta \\
H_{y} = -H_{s}\gamma \\
H_{z} = H_{c}\beta c\gamma + z_{0}
\end{cases}$$
(28)

4 2URR-2RRU 并联机构机构速度 分析

对公式(21 ~ 24) 等式两边求全微分可得到:
$$T[\theta'_{13} \ \theta'_{23} \ \theta'_{32} \ \theta'_{42}]^{\mathrm{T}} = G[\beta' \ \gamma' \ z'_{0}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{44} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \\ G_{41} & G_{42} & G_{42} \end{bmatrix}$$

其中:

$$T_{11} = a_{1}lc\theta_{13} - c_{1}ls\theta_{13}$$

$$T_{22} = a_{2}lc\theta_{23} - c_{2}ls\theta_{23}$$

$$T_{33} = c_{3}lc\theta_{32} - a_{3}ls\theta_{32}$$

$$T_{44} = a_{4}ls\theta_{42} + c_{4}lc\theta_{42}$$

$$G_{11} = z_{0}sec\beta t\beta(a_{1} - ls\theta_{13})$$

$$G_{12} = e_{1}s\gamma(c_{1} - lc\theta_{13}) - e_{1}c\gamma(a_{1} - ls\theta_{13})$$

$$G_{13} = sec\beta(a_{1} - ls\theta_{13})$$

$$G_{21} = z_{0}sec\beta t\beta(a_{2} - ls\theta_{23})$$

$$G_{22} = e_{1}c\gamma(a_{2} - ls\theta_{23}) - e_{1}s\gamma(c_{2} - lc\theta_{23})$$

$$G_{23} = sec\beta(a_{2} - ls\theta_{23})$$

$$G_{31} = (e_{1}s\beta + z_{0}sec\beta^{2})(a_{3} - lc\theta_{32}) + e_{1}c\beta(c_{3} - ls\theta_{32})G_{32} = 0$$

$$G_{33} = t\beta(a_{3} - lc\theta_{32}) + (c_{3} - ls\theta_{32})$$

$$G_{41} = (z_{0}sec\beta^{2} - e_{1}s\beta)(a_{4} + lc\theta_{42}) - e_{1}c\beta(c_{4} - ls\theta_{42})G_{42} = 0$$

$$G_{43} = t\beta(a_{4} + lc\theta_{42}) + (c_{4} - ls\theta_{42})$$

$$Etilde{D} = 2URR-2RRU \# Kll hh b = Etilde{D} = 5HE hitto = 1$$

$$[\theta'_{13} = \theta'_{23} = \theta'_{32} = \theta'_{42}]^{T} = T^{-1}G[\beta' \gamma' z'_{0}]^{T}$$

$$(30)$$

5 2URR-2RRU 并联机构奇异性分析

奇异性是并联机构的固有特性。通常利用雅克比 矩阵判断并联机构奇异性时,可以把奇异类型分为3 类:反解奇异、正解奇异以及混合奇异。

(1)当|**T**|=0, |**G**|≠0时, 机构处于反解奇异 位形, 也称为边界奇异。当 T_{11} 、 T_{22} 、 T_{33} 、 T_{44} 中任一个为 零时, 则|**T**|=0。

若
$$T_{11} = 0$$
则有 $l(a_1c\theta_{13} - c_1s\theta_{13}) = 0$ 可以得到:
 $z_0 = c\beta t\theta_{13}(e_2 - e_1c\gamma)$ (31)
若 $T_{22} = 0$ 则有 $l(a_2c\theta_{23} - c_2s\theta_{23}) = 0$ 可以得到:
 $z_0 = c\beta t\theta_{23}(e_1c\gamma - e_2)$ (32)

若
$$T_{33} = 0$$
 则有 $l(c_3c\theta_{32} - a_3s\theta_{32}) = 0$ 可以得到;

$$z_0 = \frac{t\theta_{32}(e_2 - e_1c\gamma) - e_1s\beta}{(1 - t\beta t\theta_{32})}$$
(33)

若
$$T_{44} = 0$$
 则有 $l(a_4s\theta_{42} + c_4c\theta_{42}) = 0$ 可以得到:

$$x_0 = \frac{e_1 s \beta + t \theta_{42} (e_2 - e_1 c \beta)}{(1 - t \beta t \theta_{42})}$$
(34)

(2) 当 $|G| = 0, |T| \neq 0$ 时,机构处于正解奇异 位形。

G矩阵中各元素表达式较长,如果直接对G矩阵进行行列式符号运算的话运算量较大,并且找不到规律,无法判断G矩阵行列式是否为零。这种情况下需要

采用数值搜索的方法来对 G 矩阵行列式进行判断。通过 计算,笔者发现参数在 – 50° $\leq \beta \leq 50°$ 、 – 50° $\leq \gamma \leq$ 50°、250 mm $\leq z_0 \leq 650$ mm 范围内时,G 矩阵的行列 式是不为零的,即不存在正解奇异。

(3) 当 |G| = 0, |T| = 0 时, 机构处于混合奇异 位形。

由前所述 | G | = 0 不成立,所以机构不存在混合 奇异。

综上所述,并联机构 2URR-2RRU 不存在正解奇 异和混合奇异,只存在反解奇异,且反解奇异有 4 种 情况,即 $T_{11} = 0$ 时,分支1处于奇异位形; $T_{22} = 0$ 时, 分支2处于奇异位形; $T_{33} = 0$ 时,分支3处于奇异位 形, $T_{44} = 0$ 时,分支4处于奇异位形,机构各分支奇 异位置如图 6 所示。



6 工作空间分析

并联机构的工作空间主要受以下几个条件的 约束:

(1)并联机构各分支杆件长度限制。结合本研究中的2URR-2RRU并联机构的结构特点以及动平台和定平台的结构尺寸可以选取杆长为*l* = 400 mm;

(2)并联机构杆件之间的相互干涉。因为该并联机构只有4个分支,并且各分支的驱动关节为转动副, 使得各分支之间不可能出现交叉情况,不存在干涉现象;

(3) 奇异位形的影响。考虑到该机构只有反解奇 异,故只需要使如下等式成立即可:

$$\begin{cases} z_{0} \neq c\beta t\theta_{13}(e_{2} - e_{1}c\gamma) \\ z_{0} \neq c\beta t\theta_{23}(e_{1}c\gamma - e_{2}) \\ z_{0} \neq \frac{t\theta_{32}(e_{2} - e_{1}c\gamma) - e_{1}s\beta}{(1 - t\beta t\theta_{32})} \\ z_{0} \neq \frac{e_{1}s\beta + t\theta_{42}(e_{2} - e_{1}c\beta)}{(1 - t\beta t\theta_{42})} \end{cases}$$
(35)

(4)运动副转角的限制,运动副转角约束如图 7 所示。



要满足:

$$\theta_{Ti} = a\cos\frac{q_i n_{Ti}}{|q_i|} \le \theta_{Timax}$$
(36)

式中: θ_{T} + 转动副和万向铰的传动角度; $\theta_{T_{imax}}$ - 最大 转角, $\theta_{T_{imax}}$ = 50°。

综上所述,本研究给出三维模型基本参数 $e_1 = 250 \text{ mm}_{\circ}e_2 = 400 \text{ mm}_{\circ}H = 50 \text{ mm}_{\circ}$ 动平台3个参数取 值范围如下:

$$\begin{cases}
-\theta_{T_{imax}} \leq \gamma \leq \theta_{T_{imax}} \\
-\theta_{T_{imax}} \leq \beta \leq \theta_{T_{imax}} \\
2l_{\cos\theta_{T_{imax}}} \leq z_{0} \leq \sqrt{4l^{2} - (e_{2} - e_{1})^{2}}
\end{cases}$$
(37)

由上述条件,本研究结合公式(26)利用 Matlab 数 值搜索求解出工作空间,流程图如图 8 所示。







由工作空间图可看出:该机械手在 Y 轴上的空间 大小有刀具长度决定。

7 力/运动传递性能分析

7.1 螺旋分析

分支1上的螺旋 **\$**₁₁、**\$**₁₂、**\$**₁₃以及 **\$**₁₄在固定坐标系下的表示为:

$$\begin{cases} \$_{11} = (c\theta_{11}, 0, s\theta_{11}; -e_{2}s\theta_{11}, 0, e_{2}c\theta_{11}) \\ \$_{12} = (0, 1, 0; 0, 0, 0) \\ \$_{13} = (c\theta_{11}, 0, s\theta_{11}; s\theta_{11}(lc\theta_{12} - e_{2}), \\ ls\theta_{12}, c\theta_{11}(e_{2} - lc\theta_{12})) \\ \$_{14} = (c\theta_{11}, 0, s\theta_{11}; s\theta_{11}(lc\theta_{12} + lc\theta_{13} - e_{2}), \\ l(s\theta_{12} + s\theta_{13}), - c\theta_{11}(lc\theta_{12} + lc\theta_{13} - e_{2})) \end{cases}$$
(38)

根据(38) 求解其反螺旋,得分支1的约束螺旋为:

$$\begin{cases} \$_{c1} = (0,0,0; -t\theta_{11},0,1) \\ \$_{c2} = (ct\theta_{11},0,1;0,0,0) \end{cases}$$
(39)

由于并联机构的驱动关节为分支中间的 *R* 副,得 到: *\$*₁₃ = *\$*₁₀。此处对[*\$*₁₁,*\$*₁₂,*\$*₁₄]求解力反螺 旋,可得分支传递螺旋 *TWS* 为:

$$\$_{T1} = (-as\theta_{11}, b, ac\theta_{11}; -ae_2c\theta_{11}, 0, -ae_2s\theta_{11})$$
(40)

同理得到分支2、3、4的约束螺旋**\$**_{C3}、**\$**_{C4}、**\$**_{C5}、 **\$**_{C6}、**\$**_{C7}、**\$**_{C8}以及传递力螺旋**\$**_{T2}、**\$**_{T3}、**\$**_{T4}:

$$\begin{cases} \$_{C3} = (0,0,0; -t\theta_{21},0,1) \\ \$_{C4} = (ct\theta_{21},0,1;0,0,0) \\ \$_{C5} = (0,0,0; -t\beta,0,1) \\ \$_{C6} = (0,1,0;ss,0,0) \\ \$_{C7} = (0,0,0; -t\theta_{21},0,1) \\ \$_{C8} = (0,1,0;sss,0,0) \end{cases}$$
(41)

$$\begin{cases} \$_{T2} = (-f_{s}\theta_{21}, g, f_{c}\theta_{21}; \\ f_{e_{2}c}\theta_{21}, 0, f_{e_{2}s}\theta_{21}) \\ \$_{T3} = (z, 0, v; 0, e_{2}v, 0) \\ \$_{T4} = (w, 0, m; 0, -e_{2}m, 0) \end{cases}$$
(42)

其中:

$$a = l(s\theta_{12} + s\theta_{13}),$$

$$b = l(c\theta_{12} + c\theta_{13}),$$

$$f = l(s\theta_{22} + s\theta_{23}),$$

$$g = l(c\theta_{22} + c\theta_{23}),$$

$$ss = t\theta_{11}(lc\theta_{31} + lc\theta_{32} - e_2) - l(s\theta_{31} + s\theta_{32})sss =$$

$$t\theta_{11}(lc\theta_{41} - lc\theta_{42} + e_2) - l(s\theta_{41} + s\theta_{42}),$$

$$z = l(c\theta_{31} + c\theta_{32}),$$

$$v = l(s\theta_{31} + s\theta_{33})_{0}$$

锁住任意2个分支驱动副,共有 C₄² = 6种取法,此 时剩余2个分支仍提供驱动,其中可选取任意1个分支 为冗余驱动分支,那么在无约束奇异的前提下,机构自 由度数为降为1。

机构分支锁定组合如表3所示。

表 3 机构分支锁定组合

被锁分支	驱动分支	5 维约束力螺旋系
1,2	3,4	${}^{1}\boldsymbol{H} = [\$_{T1}, \$_{T2}, \$_{C1}, \$_{C2}, \$_{C3}]$
1,3	2,4	${}^{2}\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{\$}_{T1}, \boldsymbol{\$}_{T3}, \boldsymbol{\$}_{C1}, \boldsymbol{\$}_{C2}, \boldsymbol{\$}_{C3}]$
1,4	2,3	${}^{3}\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\$}_{T1}, \boldsymbol{\$}_{T4}, \boldsymbol{\$}_{C1}, \boldsymbol{\$}_{C2}, \boldsymbol{\$}_{C3} \end{bmatrix}$
2,3	1,4	${}^{4}\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \$ _{T2}, \$ _{T3}, \$ _{C1}, \$ _{C2}, \$ _{C3} \end{bmatrix}$
2,4	1,3	${}^{5}\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{\$}_{T2}, \boldsymbol{\$}_{T4}, \boldsymbol{\$}_{C1}, \boldsymbol{\$}_{C2}, \boldsymbol{\$}_{C3}]$
3,4	1,2	${}^{6}\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \$ {}_{T3}, \$ {}_{T4}, \$ {}_{C1}, \$ {}_{C2}, \$ {}_{C3} \end{bmatrix}$

对其求反螺旋,可得动平台输出运动螺旋 $\$_{\alpha}(i=1 \sim 6)$ 。

7.2 局部传递指标

机构力 / 运动传递可分为输入传递以及输出传递 两部分。输入传递性能可以反应能量从输入端至分支 的效率,输出性能反应能量从分支到输出端的效率。输 入输出传递性能的求解表达式分别为:

$$\lambda_{i} = \frac{|\$_{li} \circ \$_{Ti}|}{|\$_{li} \circ \$_{Ti}|_{\max}}$$
(43)

$$\boldsymbol{\eta}_{i} = \frac{|\boldsymbol{s}_{0i} \circ \boldsymbol{s}_{Ti}|}{|\boldsymbol{s}_{0i} \circ \boldsymbol{s}_{Ti}|_{\max}}$$
(44)

式中: λ_i —第*i*个分支关于**\$**_n与**\$**_n的功率系数,*i* = 1 ~ 6; η_i —第*i*个分支关于**\$**_{oi}与**\$**_n的功率系数,*i* = 1 ~ 6。

显然当功率系数值接近于1时,力/运动传递性能越好;功率系数值接近于0的时,力/运动传递性能很差。因此定义总体性能指标为 $\gamma = \min{\lambda_i, \eta_i}$ 。

根据7.1节所求的输入输出螺旋以及传递螺旋,

且机构角度参数 β_{γ} 与工作空间中参数一致, $z_0 = 300 \text{ mm}_{\circ}$ 将螺旋代入到等式(43 - 44)中求解,绘制力/运动传递性能图,LTI性能图谱如图 10 所示。



图 10 LTI 性能图谱

从图 10 可以看出:并联机构 2URR-2RRU 的功率 系数值大于 0.7 的区域中角度参数 β、γ 取值范围大, 表明该机构的力 / 运动传递性能良好。

8 结束语

本研究分析了一种新型两转一移冗余驱动并联机 构 2URR-2RRU,首先运用螺旋理论对机构自由度进行 了分析,并得到了该并联机构动平台转定平台旋转矩 阵,依次建立了各分支坐标系并进行位置分析,得到了 该机构运动学反解解析解及正解数值解。根据反解解 析解推导出该机构雅克比矩阵,利用雅克比矩阵对 2URR-2RRU 进行了奇异分析。

结果显示:该机构只存在反解奇异,不存在正解奇 异以及混合奇异。综合该机构杆长、干涉、奇异位型、 运动副转角等约束条件,求解出该机构工作空间。通 过对 2URR-2RRU 机构的 LTI 性能指标计算发现,该 机构的力/运动传递性能优越区域大,很好地说明了该 机构力/运动传递性能佳。

参考文献(References):

- GOGU G. Fully-isotropic TlR3-type redundantly-actuated parallel manipulators [J]. Recent Progress in Robotics: Viable Robotic Service to Human, 2007, 370 (10): 79-90.
- [2] SAGLIA J A, TSAGARAKIS N G, DAI J S, et al. A high performance 2-dof over-actuated parallel mechanism for ankle rehabilitation [J]. The IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2009, 28 (9): 2677-2683.
- [3] FIRMANI F, PODHORODESKI R P. Force-unconstrained poses for a redundantly-actuated planar parallel manipulator
 [J]. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39 (5): 459-476,
- [4] GOGU G. Full-isotropic T2R3-type redundantly-actuated

parallel robots [C]. Proceedings of the IEEE/TRSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, San Diego:IEEE,2007.

- [5] ROPPONEN T, NAKAMURA Y. Singularity-free parameterization and performance analysis of actuation redundancy
 [J]. IEEE International Conference on Robotic and Automation, 1990(2):806-811.
- [6] ZANGANEH K E, ANGELES J. Mobility and position analyses of a novel redundant parallel manipulator[J]. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1994(4):3049-3054.
- ZANGANEH K E, ANGELES J. Instantaneous kinematics and design of a novel redundant parallel manipulator [J].
 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1994(4):3043-3048.
- [8] XU B Q, LI T M, LIU X J, et al. Workspace analysis of the 4RRR planar parallel manipulator with actuation redundancy[J]. Tsinghua Science and Technology, 2010, 15(5): 509-516.
- [9] CHAKAROV D. Study of the antagonistic stiffness of parallel manipulators with actuation redundancy [J]. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39(6):583-601.
- [10] NOKLEBY S B, FISHERB R, PODHORODESKI R P, et al. Force capabilities of redundantly-actuated parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2005, 40(5):578-599.
- [11] WU J, WANG J S, WANG L P, et al. Study on the stiffness of a 5-DOF hybrid machine tool with actuation redundancy [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44 (2):289-305.
- [12] MERLET J P. Parallel robot: open problems [C]. Proceedings of 9th International Symposium of Robotics Research, London: Springer-Verlag,2000.
- [13] MERLET J P. Redundant parallel manipulators[J]. Journal of Laboratoiy Robotic and Automation, 1996, 8(1): 17-24.
- [14] KIM S. Operational quality analysis of parallel manipulators with actuation redundancy [J]. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1997 (3): 2651-2656.
- [15] CONKUR E S, BUCKINGHAM R. Clarifying the definition of redundancy as used in robotics [J]. Robotica, 1997, 15 (5):583-586.
- [16] GALLARDO A J, AGUILAR N C R, CASIQUE R L, et

al. Kinematics and dynamics of 2(3-RPS) manipulators by means of screw theory and the principle of virtual work[J]. **Mechanism and Machine Theory**, 2008, 43(10):1281-1294.

- WANG J, GOSSELIN C M. Kinematic analysis and design of kinematically redundant parallel mechanisms [J].
 ASME J Mech Des, 2004, 126(1):109-118.
- [18] KOCK S, SCHUMACHER W. Redundant parallel kinematic structures and their control[J]. Springer Tracts in Advanced Robotics, 2011(67):143-157.
- [19] GOSSELIN C, ANGELES J. The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of freedom parallel manipulator
 [J]. Journal of Mechanisms Design, 1989, 111 (2): 202-207.
- [20] WANG J, WU C, LIU X J. Performance evaluation of parallel manipulators: motion/force transmissibility and its index [J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45 (10):1462-1476.
- [21] HUANG Zhen, CHEN Long-hui, LI Yan-wen. The singularity principle and property of Stewart parallel manipulator [J]. Journal of Robotic Systems, 2003, 20(4):163-176.
- [22] HUANG Z, CAO Y, LI Y W, et al. Structure and property of the singularity loci of the 3/6-Stewart-Gough platform for general orientations[J]. Robotica, 2006, 24(1):75-84.
- [23] 李艳文,黄 真,高 峰.一种新的奇异研究方法及其应 用实例[J].燕山大学学报,2004,28(1):40-44.
- [24] 李秦川,孙晓东,陈巧红,等.2-PRS-PRRU并联机构运动学 分析与奇异分析[J].机械工程学报,2011,47(3):21-27.
- [25] 韩敬虎,俞经虎.食品控制咀嚼机器人灵活性分析与运动仿真[J].轻工机械,2016,34(2):20-24.
- [26] XIE Fu-gui, LIU Xin-jun, WANG Jin-song. A 3-DOF parallel manufacturing module and its kinematic optimization
 [J]. Robotic and Computer Integrated Manufacturing, 2012, 28(3):334-343.
- [27] LIU Xin-jun, WANG Li-ping, XIE Fu-gui. Design of a three-axis articulated tool head with parallel kinematics a-chieving desired motion/force transmission characteristics
 [J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2010, 132(2):237-247.
- [28] LIU Xin-jun. Orientation capability, error analysis and dimensional optimization of two articulated tool heads with parallel kinematics [J]. Advances in Mechanical Engineering, 2010(2):1652-1660.

[编辑:张 豪]

第1期

本文引用格式:

WANG Zhong-lin, ZHANG Ning-bin. Kinematics and performance analysis of redundantly-actuated parallel mechanism 2URR-2RRU[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2017,35(1):1-9. 《机电工程》杂志:http://www.meem.com.cn

王中林,张宁斌. 冗余机构 2URR-2RRU 运动学与性能分析[J]. 机电工程,2017,35(1):1-9.