

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2017.09.001

# 基于乏信息理论的双渐开线齿轮 随机振动误差预测研究\*

樊智敏,任孟成

(青岛科技大学 机电工程学院,山东 青岛 266061)

**摘要:**针对目前双渐开线齿轮传动特征数据少、概率分布未知、缺乏先验知识等问题,基于乏信息理论对该齿轮传动在随机振动过程中的误差预测进行了研究,结合灰色 GM(1,1)模型和 Bootstrap 抽样原理的优点,提出了一种基于乏信息动态估计的预测方法,并在乏信息数据样本中,建立了动态灰色自助模型。利用试验所得样本数据对双渐开线齿轮振动误差进行了评估预测,并将模型预测值与原始试验数据进行了对比,以验证该方法的可行性及预测模型的可靠性;同时与灰色 GM(1,1)模型和蒙特卡罗模型的预测值进行了对比,以验证该模型的准确性。研究表明:该模型预测结果精度较高,能有效地缩短试验时间,节约试验成本,较好地解决了双渐开线齿轮随机振动误差的预测问题,该预测方法也可用于其他齿轮传动。

**关键词:**乏信息;双渐开线齿轮;动态灰色自助模型;振动误差

中图分类号:TH132.413;TH113.1

文献标志码:A

文章编号:1001-4551(2017)09-0953-06

## Prediction of random vibration error for double involute gear based on poor information theory

FAN Zhi-min, REN Meng-cheng

(College of Mechanical Engineering, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, China)

**Abstract:** Aiming at solving the problems that double involute gear drive has less characteristics data, unknown probability distribution and lack of prior knowledge, based on the theory of poor information, the error prediction of the gear drive was studied in the process of random vibration. Combined with the advantages of GM (1, 1) model and bootstrap sampling principle, a new method was presented based on the dynamic estimation of the poor information, and the dynamic grey bootstrap model was established in the data sample of poor information. The experimental data were used to evaluate the vibration error of the double involute gear, and the predicted values were compared with the original experimental data to verify the reliability of the model, meanwhile compared with the predicted values of GM (1, 1) model and Monte Carlo model to validate the effectiveness of the model. The results indicate that this model has high prediction accuracy, but also can shorten the testing time effectively, reduce the cost of test, and can solve the random vibration error prediction problem of double involute gear preferably. This method can also be used for other gear drive.

**Key words:** poor information; double involute gear; dynamic grey bootstrap model; vibration error

## 0 引 言

乏信息即贫信息,是指研究对象呈现的特征信

息不完备或不充分,缺乏先验知识<sup>[1]</sup>。如概率分布未知、样本小、实验样本多,但有用的样本含量少、趋势未知等都具有乏信息的特征。对于乏信息样

收稿日期:2017-02-27

基金项目:山东省自然科学基金资助项目(ZR2014EEM003,ZR2015EM035)

作者简介:樊智敏(1963-),男,山西万荣人,教授,博士生导师,主要从事机械传动设计理论与方法、机械系统创新设计方面的研究. E-mail: zm-fan@163.com

本数据的评估预测,非统计理论显示出很大的优越性。

近年来,基于非统计原理的混沌理论、模糊理论、灰色系统理论和信息熵理论等方法,在处理乏信息问题过程中得到了广泛的应用<sup>[2]</sup>。张洪才等<sup>[3]</sup>研究了以小子样机械系统寿命序列为代表的时序系统的混沌特性,阐述了灰色关联分析和灰色模型在机械产品可靠性分析与预测中的应用方法;陈文华等<sup>[4]</sup>针对齿轮系统中各项误差具有不同概率分布规律的特点,提出了齿轮系统传动误差的蒙特卡洛拟分析方法,为准确估计齿轮系统的传动提供了理论手段;王中宇等<sup>[5]</sup>将灰色系统理论引入动态测量误差的评定,该理论利用已有测量数据预测生成新的信息,开辟出了一条解决动态测量不确定度评定问题的新途径;STEPHEN V 等<sup>[6]</sup>利用蒙特卡洛法确定了两阶不确定度、非线性测量方程和小样本量的方法;MOTRA H B 等<sup>[7]</sup>利用蒙特卡洛法研究了测量不确定度的评估及其数值计算;FAROOQUI S A 等<sup>[8]</sup>通过自助法对圆柱度的不确定度进行了预测分析;KAYACAN E 等<sup>[9]</sup>利用灰色系统理论建立了时间序列预测模型;李阳星等<sup>[10]</sup>针对模糊可靠性设计中隶属函数特征值确定困难的问题,引入熵理论,对齿轮可靠性的模糊程度进行了数值计算,为机械模糊可靠性设计提供了新方法;夏新涛<sup>[11]</sup>提出了一种基于自助法和模糊数学的算法,建立了基于乏信息对象的融合估计自助模糊数学模型,对于乏信息特征对象的测量数据进行自助抽样,通过模糊隶属函数得到所测压力值的真值与区间估计。

目前,灰色 GM(1,1)模型和 Bootstrap 法是预测乏信息系统的流行方法。灰色 GM(1,1)模型具有很好的预测功能,但其随机误差不能确定,且对原始数据有特殊要求;而 Bootstrap 法可以通过重复取样获得其概率分布,但当数据很少时,所产生的评估误差极大<sup>[12]</sup>。

双渐开线齿轮传动是一种新型齿轮传动,针对目前该传动特征数据少、概率分布未知、缺乏先验知识等情况,本研究结合灰色 GM(1,1)模型和 Bootstrap 法二者的优点,提出一种动态灰色自助评估模型,通过对比 GM(1,1)模型和蒙特卡罗模型在小数据样本中的期望值、估计不确定度和估计的可靠性,验证 DGBM 模型对双渐开线齿轮振动特性具备良好的评估预测功能,同时也为其他齿轮传动振动特性的评估预测提供一种新的理论方法。

## 1 DGBM 模型的基本原理

### 1.1 自助重复取样

本研究将连续时间变量  $k$  离散化,得到双渐开线齿轮振动数据的序列向量为:

$$Y = \{y(k)\}, k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

从  $Y$  中取与  $k$  时刻紧邻的前  $u$  个振动数据,得到  $t$  时刻的动态评估子序列向量为:

$$Y_t = \{y_t(u)\};$$

$$u = k - t + 1, k - t + 2, \dots; t \leq k \quad (2)$$

动态评估是指用  $k$  时刻前的子序列向量评估  $k$  时刻的振动状态。根据自助抽样原理<sup>[13]</sup>,对原始实验数据  $Y_t$  进行重复取样,等概率可放回的随机抽取  $m$  次,得到一个具有  $m$  个数据的自助样本,连续重复操作  $B$  次,得到数据样本如下:

$$Z_{kb} = \{z_{k,b}(u)\},$$

$$(u = 1, 2, \dots, s; b = 1, 2, \dots, B; k = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

式中: $z_{k,b}(u)$ — $k$  时的第  $b$  个样本数据中的第  $u$  个数据。

### 1.2 概率密度函数

矩阵  $Z_{kb}$  每列的平均值为:

$$\bar{Z}_{kb} = \left\{ \frac{1}{s} \sum_{u=1}^s z_{k,b}(u) \right\}, (b = 1, 2, \dots, B; k = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

将  $\bar{Z}_{kb}$  中的  $B$  个数据进行整理并划分为  $D$  组,得到第  $d$  组的频数为:

$$P_d = \frac{n_d}{B}, (d = 1, 2, \dots, D) \quad (5)$$

式中: $n_d$ —第  $d$  组的数据量。

本研究使用连续变量  $x$  代替离散变量  $Z_b(x)$  根据最大熵算法,得到自助概率密度分布函数  $p(x)$  为:

$$p(x) = \exp(\lambda_0 + \sum_{i=1}^{m_A} \lambda_i x^i) \quad (6)$$

式中: $\lambda_i$ —拉格朗日乘子, $m_A$ —原始特征序列。

### 1.3 加权均值估计

在第  $k$  个样本点,试验样本数据的融合值用数学期望表示为:

$$z(k) = \int_R xp(x) dx \quad (7)$$

式中: $R$ —积分空间。

加权估计均值可以通过离散值表示为:

$$z(k) = \sum_{d=1}^D Z_d P_d \quad (8)$$

式中: $Z_d$ —第  $d$  组的均值。

估计的平均不确定度  $u(k)$  为:

$$u(k) = \sqrt{\frac{\sum_{b=1}^B \sum_{u=1}^S (z_{k,b(u)} - z(k))^2}{S \times B - 1}} \quad (9)$$

从而,得到估计期望值序列  $E_Z$  为:

$$E_Z = \{z(k)\}, (k = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

估计不确定度的序列  $E_U$  为:

$$E_U = \{u(k)\}, (k = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

#### 1.4 动态自助灰色模型

在 DGBM 模型中,用  $X$  表示数据序列  $Z$  的一阶累加生成序列(1-AGO),原始数据序列  $Z$  和 1-AGO 序列之间的关系为:

$$X = \{x(k)\} = \left\{ \sum_{j=1}^k z(j) \right\}, (k = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

DGBM 模型可以表示为如下微分方程:

$$\frac{dx(k)}{dk} + c_1 x(k) = c_2 \quad (13)$$

式中: $c_1, c_2$ —灰色系数, $c_1$  的大小反映预测的发展趋势, $c_2$  反映测量数据的变化。

在初始条件为  $x(1) = z(1)$  下,灰色微分方程的最小二乘解为:

$$\hat{x}(k+1) = \left( x(1) - \frac{c_2}{c_1} \right) \exp(-c_1 k) + \frac{c_2}{c_1}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

其中,

$$[c_1, c_2]^T = [\varphi^T \varphi]^{-1} \varphi^T F \quad (15)$$

$$\varphi = [-Y, I]^T, I = [1, \dots, 1] \quad (16)$$

式中: $I$ —维数  $n-1$  的单位。

得到灰色微分模型后,使用一阶逆累积生成操作(1-IAGO)计算序列  $\hat{z}$  的预测数据。预测数据序列  $\hat{z}$  和 1-IAGO 序列  $\hat{x}$  之间的关系为:

$$\hat{z}(k+1) = \hat{x}(k+1) - \hat{x}(k), (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (17)$$

期望值的估计误差  $E_{sq}$  为:

$$E_{sq} = \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^s [z_0 - \hat{z}(k)]^2 \quad (18)$$

在给置信水平  $P$  的情况下,评估的可靠性  $P_r$  为:

$$P_r = \left( 1 - \frac{e}{n} \right) \times 100\% \quad (19)$$

式中: $e$ —除估计区间  $[Z_L, Z_U]$  之外的数据量; $n$ —样本数据的总数。

可以看出,DGBM 模型是通过对小样本数据进行

自助抽样获得大量样本数据,再利用灰色理论进行累加生成和数据融合,DGBM 模型没有应用任何概率分布问题,弥补了原始统计理论在乏信息数据预测中的不足,因此该模型可以更加准确地对小样本数据进行评估预测。

## 2 实验及结果分析

### 2.1 试验装置简介

试验台及测试仪器配置如图 1 所示。

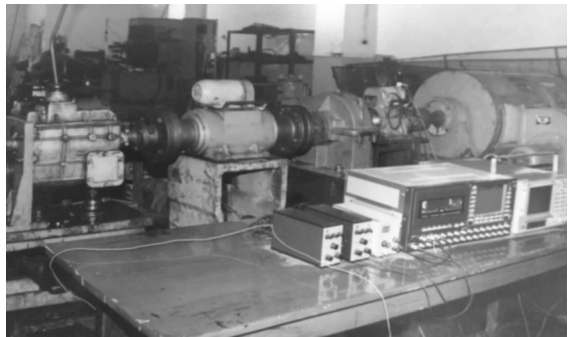


图 1 试验台及测试仪器配置

试验齿轮及齿轮箱如图 2 所示。

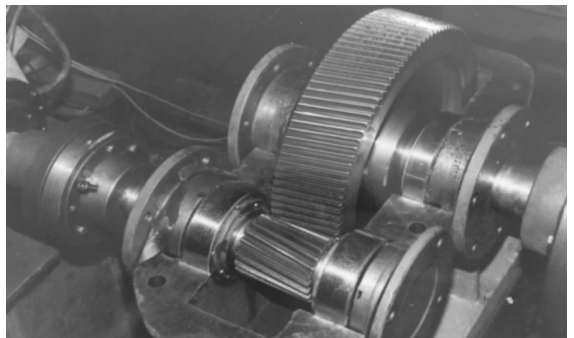


图 2 试验齿轮及齿轮箱

实验时,通过控制台调节控制系统使交直流电机产生适当的电压,并控制直流测功机以一定转速运转,通过联轴器以及输入转速扭矩传感器接入实验齿轮箱的输入端,其输出端则通过联轴器以及输出转速扭矩传感器、变速器相连。为测试试验齿轮箱的振动情况,本研究分别在其高速轴及低速轴的轴承座处安装三维压电式加速度传感器,同时测量该处径向、轴向、周向 3 个方向上的振动。传感器提取的振动信号经电荷放大器放大处理后,由磁带记录仪记录,最后回放动态分析仪中进行时域、频谱分析<sup>[14]</sup>。

本研究取试验齿轮的额定转速  $n_1 = 1\ 500$  r/min,输入扭矩  $T_1 = 174$  Nm,试验齿轮参数如表 1 所示。

表 1 试验齿轮参数

基本参数	大齿轮 $z_2$	小齿轮 $z_1$
齿数	110	22
模数 $m_n/\text{mm}$	3	3
螺旋角 $\beta$	$8^\circ 6' 34''$	$8^\circ 6' 34''$
中心距 $a/\text{mm}$	200	200
齿宽 $b/\text{mm}$	80	80
端面重合度 $\varepsilon_\alpha$	1.610	1.610
纵向重合度 $\varepsilon_\beta$	1.197	1.197
材料	40Cr	40Cr
硬度/HB	180	200

2.2 数据分析

对原始实验数据进行自助重复取样,即分别等概率可放回的随机抽取  $m$  次,得到一个具有  $m$  个数据的自助样本,连续重复操作  $B$  次,得到  $B$  个自助再抽样样本。在置信水平  $P = 99.7\%$  的前提下,不同的参数  $B$  从 50 ~ 1 000,参数  $m$  从 4 ~ 8 时估计误差  $E_{sq}$  和可靠性  $P_r$  的变化关系如图(3 ~ 4)所示。

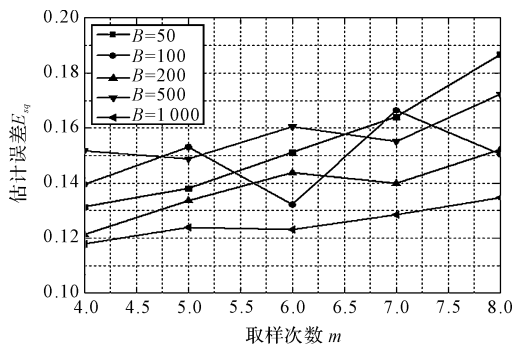


图 3 B 和 m 取不同值时 DGBM 模型的估计误差

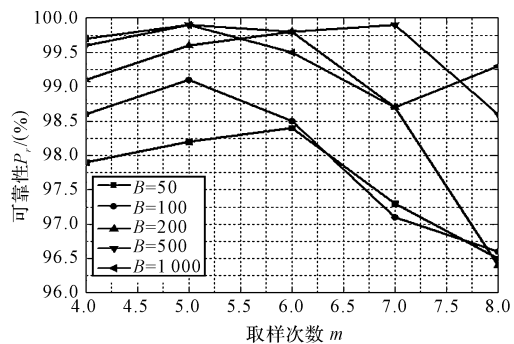


图 4 B 和 m 取不同值时 DGBM 模型的可靠性

从图 3 和图 4 中可以看出,随着参数  $m$  的增大,估计误差  $E_{sq}$  增加,可靠性  $P_r$  降低;随着参数  $B$  的增大,估计误差  $E_{sq}$  降低,可靠性  $P_r$  增加。通过大量数据分析验证:参数  $m$  在 4 和 6 之间,参数  $B$  在 500 和 1 000 之间,可以达到理想的估计性能;当参数  $m = 4$  时估计误差相对较小,可靠性相对较高,估计性能最好。

2.3 随机振动误差预测

为了验证在样本数据匮乏的情况下,DGBM 模型的有效性,笔者取  $m = 4, B = 64$ ,通过重复取样获得样本数据分成 8 组。振动速度样本数据如表 2 所示。

表 2 振动速度样本数据

序号	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$	$Z_7$	$Z_8$
1	1.587	1.625	1.617	1.758	1.652	1.491	1.596	1.657
2	1.492	1.641	1.657	1.583	1.612	1.739	1.626	1.773
3	1.538	1.607	1.477	1.665	1.597	1.624	1.566	1.515
4	1.714	1.518	1.725	1.687	1.645	1.598	1.636	1.543
5	1.452	1.685	1.578	1.722	1.563	1.583	1.615	1.623
6	1.594	1.496	1.447	1.658	1.644	1.729	1.603	1.588
7	1.474	1.618	1.616	1.595	1.686	1.618	1.578	1.717
8	1.694	1.598	1.473	1.617	1.588	1.637	1.756	1.572

样本数据图如图 5 所示。

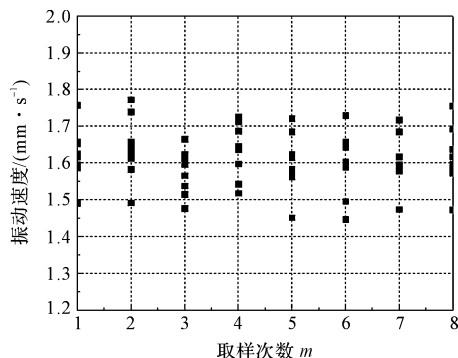


图 5 重复取样样本数据图

由公式(4)计算得  $\bar{Z}_{kb} = \{1.7356, 1.5249, 1.8635, 1.4357, 1.8362, 1.7536, 1.5312, 1.3569\}$ 。借助 Matlab 软件对样本数据进行模拟计算,得到自助概率密度函数曲线如图 6 所示。

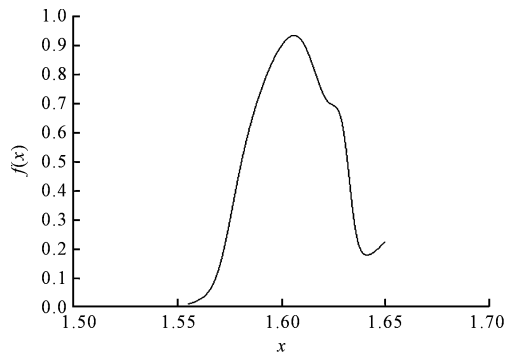


图 6 概率密度分布函数  $f(x)$  曲线

由公式(7)和公式(9)可以得到期望值  $z(1) = 1.6019$ ,不确定度  $u(1) = 0.0937$ ;当置信水平为 99.7%时,估计区间  $[Z_L, Z_U] = [1.5326, 1.6811]$ 。同样,可以得到其他期望值  $z$ 、不确定度  $u$ 、估计区间  $Z_L$  和  $Z_U$  值如表 3 所示。根据文献[15]方法,计算得到灰色 GM(1,1)预测结果如表 4 所示。根据文献[16]

方法,计算得到蒙特卡洛模型(MCM)模拟预测结果如 表5所示。

表3 利用动态自助灰色模型(DGBM)预测结果

变量	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$	$Z_7$	$Z_8$
$z$	1.601 9	1.589 6	1.605 9	1.602 7	1.593 6	1.618 2	1.623 7	1.600 8
$u$	0.093 7	0.098 3	0.104 7	0.099 1	0.118 5	0.099 4	0.111 5	0.097 3
$Z_L$	1.532 6	1.601 6	1.613 7	1.578 2	1.582 6	1.582 5	1.583 1	1.631 9
$Z_U$	1.681 1	1.699 9	1.718 4	1.677 3	1.701 1	1.681 9	1.694 6	1.729 2

表4 利用灰色GM(1,1)预测结果

变量	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$	$Z_7$	$Z_8$
$z$	1.601 9	1.600 5	1.598 1	1.603 6	1.605 1	1.599 7	1.611 2	1.600 3
$u$	0.093 7	0.101 6	0.103 3	0.098 3	0.113 2	0.091 7	0.101 1	0.092 6
$Z_L$	1.532 6	1.513 9	1.501 7	1.499 1	1.509 2	1.512 1	1.507 3	1.497 1
$Z_U$	1.681 1	1.663 1	1.691 3	1.713 6	1.700 3	1.696 8	1.692 5	1.681 1

表5 利用蒙特卡洛模型(MCM)结果

变量	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$	$Z_7$	$Z_8$
$z$	1.601 9	1.598 1	1.615 6	1.600 8	1.599 3	1.601 1	1.610 4	1.599 4
$u$	0.093 7	0.102 5	0.096 6	0.103 9	0.110 4	0.101 2	0.097 3	0.106 3
$Z_L$	1.532 6	1.498 3	1.513 7	1.511 7	1.500 3	1.513 1	1.489 8	1.501 9
$Z_U$	1.681 1	1.693 7	1.713 9	1.693 9	1.681 5	1.701 6	1.706 1	1.696 1

DGBM模型、灰色GM(1,1)模型和蒙特卡罗模型的评估预测曲线图如图(7~9)所示。

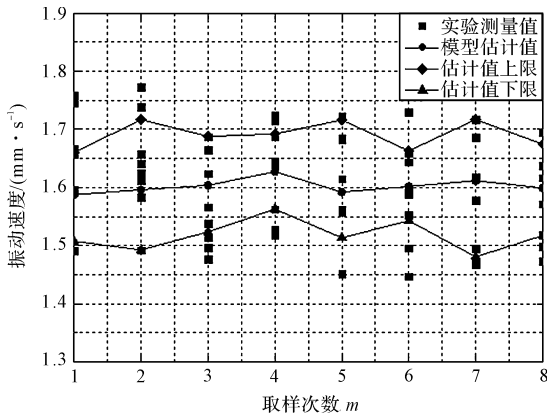


图7 DGBM模型预测结果

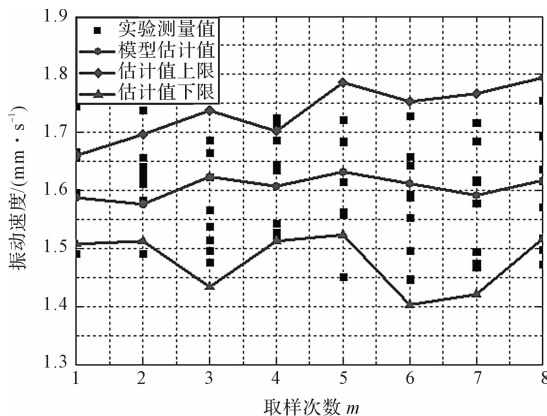


图8 GM(1,1)模型预测结果

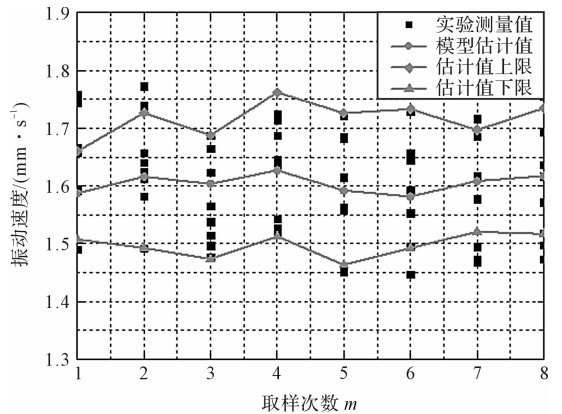


图9 MCM模型预测结果

3种模型评估预测性能的对比如图10所示。

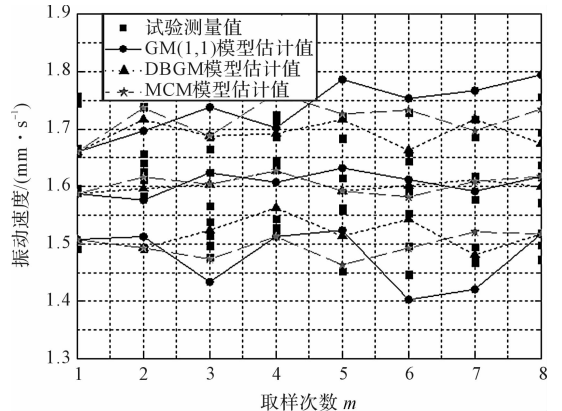


图10 三种模型预测结果对比图

本研究比较DGBM模型、灰色GM(1,1)模型和蒙

特卡洛模型(MCM)之间的评估预测结果,整理得到3种模型预测精度具体数值如表6所示。

表 6 3 种模型数据预测结果比较

模型	$E_z$	$E_{sq}/(\%)$	$U/(\%)$	$P/(\%)$	$P_r/(\%)$
DGBM	1.603 5	2.816	1.82	99.7	94.9
GM(1,1)	1.564 3	11.821	9.37	99.7	86.5
MCM	1.583 7	7.085	3.36	99.7	91.4

注: $E_z$ —期望值; $E_{sq}$ —估计误差; $U$ —估计不确定度; $P$ —置信度; $P_r$ —可靠度

从表6中可以看出,DGBM模型的估计误差 $E_{sq}$ 和估计不确定度 $U$ 分别为2.816%和1.82%,而GM(1,1)模型和MCM模型的估计误差 $E_{sq}$ 分别为11.821%和7.085%,估计不确定度 $U$ 分别为9.37%和3.36%;在置信水平为99.7%的条件下,DGBM模型、GM(1,1)模型和MCM模型的估计可靠度 $P_r$ 分别为94.9%、86.5%和91.4%。从图10中可以更直观地看出大部分时间中DGBM模型的误差估计区间小于灰色GM(1,1)模型和MCM模型,且波动幅度相对较小。结果表明,DGBM模型的估计误差和估计不确定度相对较低,而估计可靠度高。因此,DGBM模型的准确性较高,其评估预测性能优于GM(1,1)模型和MCM模型,具备良好的评估预测功能。

### 3 结束语

针对双渐开线齿轮所面临的样本小、数据少等乏信息问题,本研究提出了一种乏信息动态估计预测的新方法。该方法在综合利用灰色GM(1,1)模型和Bootstrap抽样原理优点的基础上,建立了DGBM模型,利用该模型对双渐开线齿轮随机振动误差进行了评估预测,将预测值与灰色GM(1,1)模型和蒙特卡罗模型的期望值、估计不确定度和可靠性对比,在置信水平为99.7%的条件下,DGBM模型估计可靠性可达到95%,估计误差小于3%。

研究表明:DGBM模型预测精度高,明显缩短试验时间,节约试验成本,是一种较有应用价值的方法。DGBM模型能够利用较少的试验数据,对具有乏信息特征的双渐开线齿轮振动数据进行有效估计预测,同时也为齿轮振动误差的评估预测提供了一种简单、有效的理论方法。

### 参考文献(References):

- [1] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2002.
- [2] 夏新涛. 滚动轴承乏信息试验评估方法及其应用技术研究[D]. 上海:上海大学机电工程与自动化学院,2008.
- [3] 张洪才,陈举华,黄克正,等. 给予小子样机械零件全寿命实验数据的处理方法[J]. 机械科学与技术,2003,22(6):942-944.
- [4] 陈文华,朱海峰,樊晓燕. 齿轮系统传动误差的蒙特卡洛拟分析[J]. 仪器仪表学报,2004,25(4):425-437.
- [5] WANG Z Y, GE L Y. Novel method of evaluating dynamic repeated measurement uncertainty[J]. *Journal of Testing and Evaluation*,2008,36(5):453-459.
- [6] STEPHEN V C, ROBERT D M. A two-stage Monte Carlo approach to the expression of uncertainty with non-linear measurement equation and small sample size[J]. *Metrologia*,2006,43(8):534-541.
- [7] MOTRA H B, HILDEBRAND J, WUTTKE F. The Monte Carlo method for evaluating measurement uncertainty: application for determining the properties of materials[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*,2016,45(12):220-228.
- [8] FAROOQUI S A, DOIRON T. Uncertainty analysis of cylindrical measurements using bootstrap method[J]. *Measurement*,2009,42(8):524-531.
- [9] KAYACAN E, ULUTAS B, KAYANK O. Grey system theory-based models in time series prediction[J]. *Expert Systems with Applications*,2010,37(13):1784-1789.
- [10] 李阳星,李光煜. 基于熵理论的齿轮强度的模糊可靠性设计[J]. 机械设计,2004,21(2):38-41.
- [11] XIA X T, CHEN X Y, ZHANG Y Z. Grey bootstrap method of evaluation of uncertainty in dynamic measurement[J]. *Journal of the International Measurement Confederation*,2008,41(6):687-696.
- [12] 葛乐矣,葛乐矣,赵伟,等. 乏信息动态测量误差灰自助预报[J]. 农业机械学报,2011,42(7):210-219.
- [13] 谢里阳. 机械可靠性理论、方法及模型中若干问题评述[J]. 机械工程学报,2014,50(14):27-35.
- [14] 樊智敏,张光辉. 双渐开线齿轮振动特性的试验研究[J]. 机械科学与技术,2002,21(5):820-823.
- [15] 席慧玲,孙保苍. 转子系统振动的灰色预测[J]. 煤矿机械,2004,23(6):23-25.
- [16] 张晓瑾,胡斯乐,林粤科. 连杆参数误差对机器人精度可靠性的影响[J]. 机床与液压,2015,43(9):62-66.

[编辑:李 辉]

本文引用格式:

樊智敏,任孟成. 基于乏信息理论的双渐开线齿轮随机振动误差预测研究[J]. 机电工程,2017,34(9):953-958.

FAN Zhi-min, REN Meng-cheng. Prediction of random vibration error for double involute gear based on poor information theory[J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2017,34(9):853-958.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>