

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2017.03.002

一种简化计算的 S 型加减速 NURBS 插补算法^{*}

覃珍莹, 赵东标^{*}, 周迪琪

(南京航空航天大学 机电学院, 江苏 南京 210016)

摘要:针对目前 NURBS 曲线插补中加减速控制方法不足的问题,实现了加工过程中进给速度的平滑过渡,提出了一种新的 NURBS 曲线插补方法,包括速度规划和实时插补两个方面。速度规划采用了一种基于曲率自适应的简化计算的 S 型加减速方法,并结合“双向插补”的思想实时预测减速点,防止产生过大的弓高误差;实时插补则利用 Muller 插值和 Newton 迭代法计算了下一周期的插补参数,进而求出了下一时刻到达的空间坐标点。最后与已有插补方法进行了仿真分析比较。研究表明,该方法能保证加速度连续和加加速度有界,有效减少弓高误差和进给速度波动,提高机床运行的平稳性。

关键词:非均匀有理 B 样条;速度规划;实时插补;牛顿迭代法

中图分类号:TH161;TP24

文献标志码:A

文章编号:1001-4551(2017)03-0219-05

NURBS curve interpolation algorithm for simplified calculation of S-shaped acceleration and deceleration

QIN Zhen-ying, ZHAO Dong-biao, ZHOU Di-qi

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Aiming at the deficiency of acceleration and deceleration control method in NURBS curve interpolation, and to realize the smooth transition of feedrate during the manufacturing process, a new method of NURBS interpolation was proposed, including feedrate planning and real time interpolation. In feedrate planning, a new simplified calculation method of s-shaped acceleration and deceleration based on curvature adaptive algorithm was adopted, and to prevent excessive chord error, the idea of bidirectional interpolation to predict the deceleration point in real time was also used. In real time interpolation, Muller interpolation method and Newton iterative method were utilized to calculate the interpolation parameter of the next period, and the space coordinates of the next period was given as well. Finally, the algorithm was compared with the existing interpolation methods for simulation analysis. The results indicate that this method can guarantee the continuity of acceleration and the boundedness of jerk, effectively reduce the chord error and feedrate fluctuation, and improve the stability of machine tool operation.

Key words: NURBS; feedrate planning; real-time interpolation; Newton iterative method

0 引言

NURBS 曲线以统一的数学函数描述了不同的空间曲线和曲面,表达能力强且直观性好,在 SIMENS、FANUC 等一些国外高档数控系统中已经得到了广泛应用,但在国内数控加工领域,NURBS 曲线插补技术的研究还有待改进。

NURBS 曲线插补涉及速度规划和实时插补两方面。在速度规划方面,Xu 等^[1]基于 S 型加减速考虑机床的动力学特性,提出了一种自适应的插补策略。Tsai 等^[2]将插补前加减速和后加减速结合,利用前瞻技术和数字卷积技术,实现了多 NURBS 曲线块插补时的平稳过渡。Huang 等^[3]利用正弦级数表示的加加速度曲线,给出了一种参数曲线在速度规划方面的最优方案,以二

收稿日期:2016-10-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51175261);国家重点基础研究发展计划资助项目(2014CB046501)

作者简介:覃珍莹(1991-),女,壮族,广西来宾人,硕士研究生,主要从事数控技术方面的研究。E-mail: gxqzying@163.com

通信联系人:赵东标,男,教授,博士生导师。E-mail: zdbme@nuaa.edu.cn

分法进行速度修正并迭代搜索加减速时间,显著提高了插补效率,但是反向插补时会产生较多的重复计算。吴等^[4]针对 NURBS 速度规划中连续积分与插补离散不一致性的问题,提出了一种 S 型级数式速度规划。

在实时插补方面,研究人员通常采用一阶、二阶 Tayler 展开式计算下一时刻插补参数,但由于存在截断和累积误差,将不可避免地产生进给速度波动。针对这一问题,Tsai 等^[5]提出了一种预估-校正的方法。Zhang 等^[6]提出了一种迭代的速度优化算法,利用 Adams-Bashforth 方法进行预估后加入速度反馈策略。Wu 等^[7]以 3 次或 5 次多项式近似 $u-s$ 之间的映射关系,能同时减少速度波动和弓高误差,但实现起来内存开销较大。Baek 等^[8]基于 NURBS 表达式的递归特性实现了精确而快速的插补。

本研究将 NURBS 插补分为速度规划和实时插补两部分。在速度规划阶段,首先对 NURBS 曲线进行分段,并记录速度极小值点等信息,然后采用简化计算的 S 型加减速并结合曲率自适应插补进行规划以保证插补精度,最后利用“双向插补”的思想确定减速点;实时插补阶段则采用 Muller 插值结合 Newton 迭代法求解下一个插补周期的参数值。

1 NURBS 曲线表示

一条 k 次 NURBS 曲线可以表示为分段有理多项式的形式,如下:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(u)} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (1)$$

式中: $\omega_i (i = 0, 1, \dots, n)$ —权因子, $\omega_0, \omega_1 > 0$,其余的权因子 $\omega_i (i = 2, \dots, n-1) \geq 0$; P_i —与 ω_i 相对应的控制顶点; $N_{i,k}(u)$ —定义在节点矢量 $U = [u_0, u_1, \dots, u_{n+p+1}]$ 上的 k 次 B 样条基函数,一般由 Deboor-Cox 公式表述如下:

$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{若 } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \\ \text{规定: } \frac{0}{0} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

2 速度规划

2.1 自适应速度规划

自适应速度规划一般考虑以下几个因素:

(1) 最大弓高误差 $\delta_{\max}$ 的允许速度为:

$$v_{i1} = \frac{2}{T_s} \sqrt{\delta_{\max} (2\rho_i - \delta_{\max})} \quad (3)$$

式中: T_s —插补周期; ρ_i —当前插补周期参数 u_i 处的曲率半径。

(2) 最大法向加速度 $A_{\max}$ 的允许速度为:

$$v_{i2} = \sqrt{\rho_i A_{\max}} \quad (4)$$

(3) 最大法向加加速度 $J_{\max}$ 的允许速度为:

$$v_{i3} = \sqrt[3]{\rho_i^2 J_{\max}} \quad (5)$$

综上,自适应速度规划的理想进给速度应为 $v_{\text{adap}} = \min\{v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, F\}$, F 为最大进给速度。

2.2 S 型加减速规划

传统的 S 型加减速规划以分段表示法给出位移和速度公式,复杂而且计算量大,本研究基于文献[9-10]的思想,得到以下简化计算的 S 型加减速规划思路。

2.2.1 加速阶段

预处理阶段用来统计实时插补过程中所需要的数据,对插补参数的精度要求不是很严格,可采用一阶 Tayler 展开式来计算,此阶段要记录的信息包括:插补路径长度、减速开始点和速度极小值点,从而对加工路径进行分段并计算相应的减速距离 L_d 。加速阶段如图 1 所示。

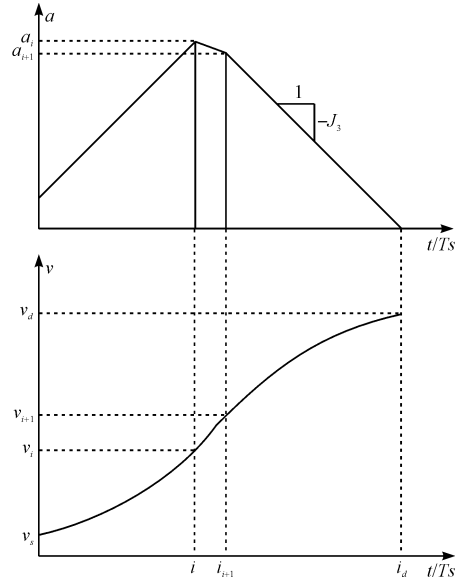


图 1 加速阶段曲线

其中, i 和 $i+1$ 为插补过程中两相邻时刻,速度、加速度和加加速度分别为 v_i, a_i, J_i 和 $v_{i+1}, a_{i+1}, J_{i+1}$; v_d 为当前规划段的最大速度, t_d 为对应插补时刻。假设当前规划段路径长度限制速度为 $v_{cr} = V(L_d, J_i, A, D)$,则 $v_d = \min(v_{cr}, v_{\text{adap}})$ 。假设下一插补周期加速度为 $\bar{a}_{i+1}$,则得到如下公式:

$$\begin{aligned} v_d - v_i &= \frac{1}{2}(\bar{a}_{i+1} + a_i)T_s + \\ &\frac{1}{2}(\bar{a}_{i+1} - a_{i_d})(t_d - [i+1])T_s \end{aligned} \quad (6)$$

整理后得到:

$$\bar{a}_{i+1}^2 + J_3 T_s \bar{a}_{i+1} + J_3 [a_i T_s - 2(v_d - v_i)] = 0 \quad (7)$$

令 a, b, c 为上述一元二次方程的系数, 求解上述方程, 由于加速阶段加速度为正值, 故取:

$$\bar{a}_{i+1} = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a \quad (8)$$

故 $i+1$ 时刻的加速度值和速度值分别为:

$$a_{i+1} = \min(\bar{a}_{i+1}, a_i + J_1 T_s, A_{\max}) \quad (9)$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{2}(a_{i+1} + a_i) T_s \quad (10)$$

故 $i+1$ 时刻速度为 $\min(F, v_{cr}, v_{\text{adapt}})$ 。

2.1.2 减速阶段

减速阶段如图2所示。

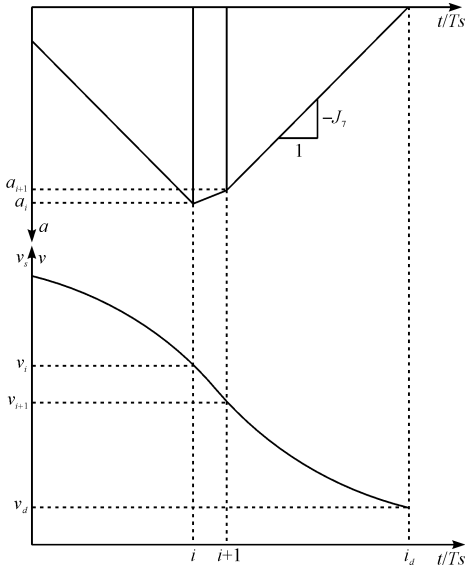


图2 减速阶段曲线

类似于加速阶段, 可建立如下的一元二次方程:

$$\bar{a}_{i+1}^2 - J_7 T_s \bar{a}_{i+1} - J_7 [a_i T_s - 2(v_d - v_i)] = 0 \quad (11)$$

同理, 令 a, b, c 为上述一元二次方程的系数, 由于减速阶段加速度为负值, 故取:

$$\bar{a}_{i+1} = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a \quad (12)$$

故 $i+1$ 时刻的加速度值为:

$$a_{i+1} = \min(\bar{a}_{i+1}, a_i - J_5 T_s, -A_{\max}) \quad (13)$$

速度值的计算与加速阶段一样。

3 实时插补

3.1 二阶 Tayler 展开式插补

假设在某一插补周期内, 要求下一周期应到达位置点 $C(u)$, 则关键是要计算对应插补参数 u 。大部分 NURBS 曲线插补都采用二阶 Tayler 级数展开法, 公式如下:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u \quad (14)$$

其中: Δu 是忽略高阶项后得到的, 如下:

$$\Delta u = \frac{v(u_i) T_s}{\left[\frac{dC(u_i)}{du} \right]} - \frac{v^2(u_i) T_s^2 \left(\frac{dC(u_i)}{du} \cdot \frac{d^2 C(u_i)}{du^2} \right)}{2 \left[\frac{dC(u_i)}{du} \right]^4}。$$

3.2 Muller 法和 Newton 迭代法相结合的插补

3.2.1 迭代式的确定

为了减少速度波动, 定义如下的构造函数:

$f(u) = \|C(u) - C(u_i)\| - v(u_i) T_s$, 则求解下一个插补参数 u_{i+1} 的问题转换为求 $f(u) = 0$ 的根。

设 u_1 和 u_2 为 $f(u) = 0$ 的两个近似根, 利用 $(u_1, f(u_1)), (u_2, f(u_2)), (u_3, f(u_3))$ 三点做 $f(u)$ 的抛物线插值多项式:

$$p(u) = f(u_1) + f\left[u_1, \frac{u_2 + u_1}{2}\right](u - u_1) + f\left[u_1, \frac{u_2 + u_1}{2}, u_2\right](u - u_1)\left(u - \frac{u_2 + u_1}{2}\right) \quad (15)$$

其中:

$$f\left[u_1, \frac{u_2 + u_1}{2}\right] = \frac{f(u_1) - f\left(\frac{u_2 + u_1}{2}\right)}{(u_1 - u_2)/2},$$

$$f\left[u_1, \frac{u_2 + u_1}{2}, u_2\right] = \frac{f(u_2) + f(u_1) - 2f\left(\frac{u_2 + u_1}{2}\right)}{\frac{(u_1 - u_2)^2}{2}}。$$

$$\text{则 } p'(u_2) = \frac{3f(u_2) + f(u_1) - 4f\left(\frac{u_2 + u_1}{2}\right)}{u_2 - u_1}, \text{ 作}$$

$f(u)$ 过 $(u_2, f(u_2))$ 点的切线方程, 以该切线与 u 轴交点的横坐标 u_3 作为根 u_{i+1} 的新的近似值, 从而推出以下的牛顿迭代公式:

$$u_3 = u_2 - \frac{f(u_2)(u_2 - u_1)}{3f(u_2) + f(u_1) - 4f\left(\frac{u_2 + u_1}{2}\right)} \quad (16)$$

只要选择的初始近似值适当, 该迭代公式便达到 2 阶收敛^[11], 其中 u_1 和 u_2 分别由二阶线性的 Tayler 和 Adams 递推方程确定, 分别如下:

$$u_1 = 3u_i - 3u_{i-1} + u_{i-2} \quad (17)$$

$$u_2 = 2.5u_i - 2u_{i-1} + 0.5u_{i-2} \quad (18)$$

则估计下一个插补参数只需把前面 3 步的参数进行线性加减运算, 并且最初的 3 个插补参数可以由二阶 Tayler 展开法计算得出。

3.2.2 迭代终止条件

速度波动率定义如下:

$$\delta_i = \frac{\Delta v_i}{v(u_i)} \times 100\% = \left(1 - \frac{\|C(u_{i+1}) - C(u_i)\|}{v(u_i) T_s}\right) \times 100\% \quad (19)$$

则可设定迭代终止条件为: $\delta_i \leq \Delta$, 其中: Δ —速度波动率的最大值, 并且迭代次数不能超过允许的最大次数 K 。

4 仿真分析

以图3所示的3次8字形NURBS曲线为例,曲线控制顶点矢量 $\boldsymbol{P}=\{(0,0),(-150,-150),(-150,150),(0,0),(150,-150),(150,150),(0,0)\}$;节点矢量 $\boldsymbol{U}=\{0,0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1\}$;权重 $\omega=\{1,10,10,1,10,10,1\}$ 。

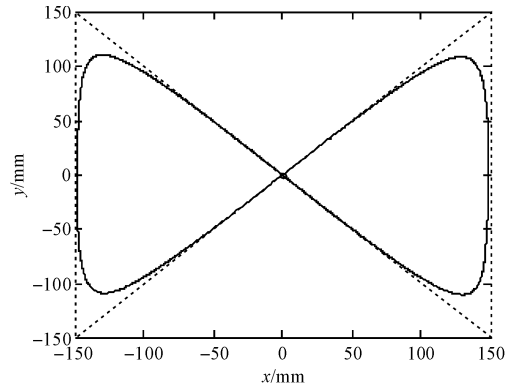


图3 NURBS曲线

机床加工参数为:插补周期 $T_s=1\text{ ms}$,进给速度 $F=600\text{ mm/s}$,最大加速度 $A_{\max}=5\text{ m/s}^2$,最大加加速度 $J_{\max}=50\text{ m/s}^3$,弓高误差 $\delta_{\max}=1\text{ }\mu\text{m}$,最大速度波动率为 $\Delta=10^{-6}$,最大迭代次数 $K=5$ 。

4.1 自适应与S型加减速规划对比

在S型加减速规划过程中,首要考虑的是减速阶段速度能否在速度极小值点之前成功减下来,防止产生过大的弓高误差。解决该问题通常是采用“双向插补”或者“回溯+重插补”的方法,前者要保证正反向插补时在会合点处速度相等且加速度为零;后者每次以最大加速度或加加速度向后重新插补一个步长,判断到达当前点时速度能否满足要求,若不满足要求,再向后插补一个步长,否则修正加速度或加加速度,以满足加工精度和机床加减速能力需求。本研究采用“双向插补”,结合文献[12]的思路和NURBS曲线的对称性^[13-15],在加速阶段,每一次插补计算中同时对被插补NURBS曲线从终点向起点方向做加速插补,并计算反向加速的当前插补参数 u 。当正向加速阶段结束时,反向插补的当前参数 u 就是减速开始点 u_{dec} 。

为了说明本研究速度规划方法的特点,笔者以二阶Tayler展开法计算下一时刻的插补参数,在单独自适应和本研究的S型加减速规划^[16]方面做出对比,所得的速度曲线、加速度曲线、加加速度曲线、弓高误差曲线分别如图4和图5所示。

从以上图形看出,整条速度曲线实现了平滑变化,虽然插补时间增加,但加速度连续变化且加加速度有界,弓高误差可控,满足了所给出的加工参数要求,保证机床的平稳运行。

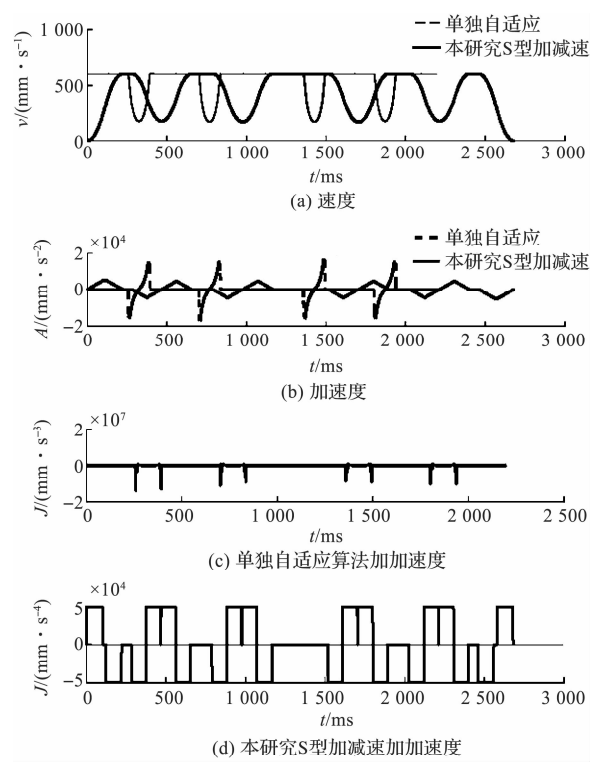


图4 本研究算法与单独自适应结果对比

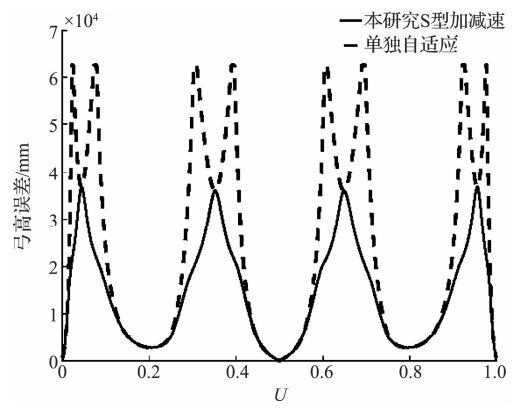


图5 弓高误差曲线

4.2 二阶 Tayler 展开式与本研究插补方法对比

为了验证本研究实时插补方法的可行性和有效性,笔者在速度波动率方面与二阶Tayler展开法作进一步的对比,结果表1和如图6所示。

表1 本研究算法与二阶 Tayler 展开式速度波动率的比较

方法	最大值/%	最小值/%	绝对平均值/%
二阶 Tayler	7.8×10^{-3}	-4.2×10^{-3}	1.9×10^{-3}
本研究算法	$9.993\ 2\times10^{-7}$	$-9.985\ 3\times10^{-7}$	$4.563\ 2\times10^{-7}$

由表1对比结果得出,本研究算法的速度波动在 $-10^{-6}\sim10^{-6}$ 之间,且平均速度波动率达到了 10^{-7} 量级,满足最大速度波动率指标的要求;而二阶Tayler展开式速度波动一般在 10^{-4} 数量级,本研究的二阶Tayler展开法速度波动大多数超过了这个量级,二阶Tayler展开式本身是舍去高阶项的误差的,哪怕忽略计算误差,也可能造成局部较大的速度波动率。本研究

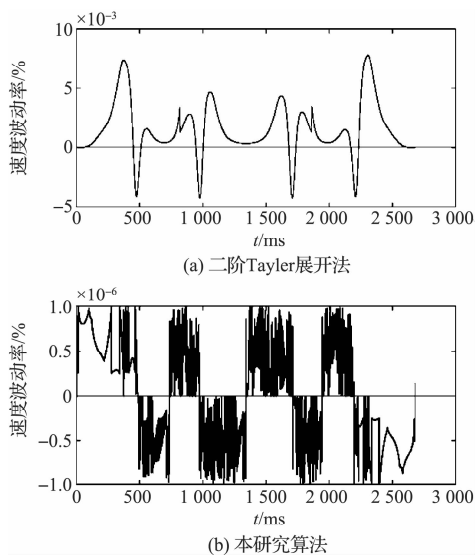


图6 速度波动率曲线

对图3进行仿真加工的插补步数为2 678,最大迭代次数为4,总的迭代次数是4 208次,即平均迭代次数约为1.571 3,因此本研究的插补算法较二阶Taylor展开式法有明显的优势,证明了该算法的可行性和有效性。

5 结束语

本研究针对现有NURBS曲线加减速控制方法的不足,提出了一种简化计算的S型加减速NURBS插补算法。根据NURBS曲线的对称性,在预处理阶段结束后,首先采用基于曲率自适应的简化计算的S型加减速进行加减速规划,保证速度和加速度连续变化,加加速度有界和弓高误差可控;在实时插补过程中,采用Muller插值结合Newton迭代法来计算下一周期的插补参数,免去了NURBS曲线复杂的求导计算,收敛快,提高了计算实时性。

仿真实验结果表明,该算法有效减少了进给速度波动,达到 10^{-6} 量级,并且进一步减少了弓高误差,能减小加工过程中对机床造成的冲击,有效提高了机床运行的平稳性。本研究所提出的NURBS插补算法可以进一步应用到基于FPGA/DSP的硬件插补器中。

参考文献(References):

[1] XU R Z, XIE L, LI C X, et al. Adaptive parametric interpolation scheme with limited acceleration and jerk values for NC machining [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2008, 36(3): 343-354.

[2] TSAI M S, NIEN H W, YAU H T. Development of integrated acceleration/deceleration look-ahead interpolation technique for multi-blocks NURBS curves [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2011, 56(5-8): 601-618.

[3] HUANG J, ZHU L M. Feedrate scheduling for interpolation of parametric tool path using the sine series representation of jerk profile [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part B Journal of Engineering Manufacture*, 2016; 230(2): 612-628.

[4] 吴 闯, 吴继春, 杨世平, 等. 基于NURBS曲线的S型级数式速度规划算法[J]. *计算机集成制造系统*, 2015, 21(12): 3249-3255.

[5] TSAI M C, CHENG C W. A real-time predictor corrector interpolator for CNC machining [J]. *Journal of Manufacturing Science & Engineering*, 2003, 125(3): 449-460.

[6] ZHANG X T, SONG Z. An iterative feedrate optimization method for real-time NURBS interpolator [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2011, 62(9-12): 1273-1280.

[7] WU J, ZHOU H, TANG X, et al. A NURBS interpolation algorithm with continuous feedrate [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2012, 59(5-8): 623-632.

[8] BAEK D, YANG S H, KO T. Precision NURBS interpolator based on recursive characteristics of NURBS [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2012, 65(1-4): 403-410.

[9] NAM S H, YANG M Y. A study on a generalized parametric interpolator with real-time jerk-limited acceleration [J]. *Computer-Aided Design*, 2004, 36(1): 27-36.

[10] EMAMI M M, AREZOO B. A look-ahead command generator with control over trajectory and chord error for NURBS curve with unknown arc length [J]. *Computer-Aided Design*, 2010, 42(7): 625-632.

[11] 雷秀红, 陈兰平. 求解非线性方程的一种新方法[J]. *首都师范大学学报: 自然科学版*, 2001, 22(2): 20-24.

[12] 罗福源, 游有鹏, 尹 涓. NURBS曲线S形加减速双向寻优插补算法研究[J]. *机械工程学报*, 2012, 48(5): 147-156.

[13] 李爱民, 尚可超. 基于自由型特征的NURBS曲线设计[J]. *机械*, 2014, 41(6): 17-21.

[14] 袁 克, 许旭乐, 王小勇, 等. 基于曲面拟合的水泵性能曲线参数的研究[J]. *流体机械*, 2016, 43(3): 22-24.

[15] 边玉超. 自由曲线曲面CNC插补技术的研究[D]. 北京: 北京化工大学机电工程学院, 2004.

[16] 叶百胜, 张立强. 小线段S型加减速方式高速衔接算法[J]. *轻工机械*, 2016, 34(3): 34-38.

[编辑: 李 辉]

本文引用格式:

覃珍莹, 赵东标, 周迪琪. 一种简化计算的S型加减速NURBS插补算法[J]. *机电工程*, 2017, 34(3): 219-223.

QIN Zhen-ying, ZHAO Dong-biao, ZHOU Di-qi. NURBS curve interpolation algorithm for simplified calculation of S-shaped acceleration and deceleration [J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2017, 34(3): 219-223.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>