DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2016.04.005

基于 Hamming 法的新型 NURBS 曲线插补算法研究*

金荣益^{1,2}, 竺韵德^{1*}, 李国平²

(1. 中国科学院宁波材料技术与工程研究所 先进制造技术研究所,浙江 宁波 315201;

2. 宁波大学 机械工程与力学学院,浙江 宁波 315211)

摘要:针对零件曲线曲面加工过程中,传统插补方法逼近误差大和速度进给波动大等众多缺点,对 NURBS 曲线的插补原理、速度规 划、插补参数计算等方面进行了研究,对弓高误差、法向加速度、进给加速度过大的情况进行了考虑,提出了一种基于 Hamming 法的 新型 NURBS 曲线插补算法,对基于 Hamming 法线性递推得到的参数预估公式进行了具体说明,对基于 Lagrange 的参数校正机理进 行了详细阐述,最后使用 Matlab 软件对此插补算法进行了实例仿真。研究结果表明,该算法简化了参数插补的计算,保证了插补的 实时性;同时提高了插补精度,在限制加速度及速度波动方面具有很好的效果。

关键词:NURBS曲线;实时插补;速度规划;Hamming法;预估校正

中图分类号:TH164 文献标志码:A

文章编号:1001-4551(2016)04-0406-05

New NURBS interpolation algorithm based on Hamming method

JIN Rong-yi^{1,2}, ZHU Yun-de¹, LI Guo-pin²

 Institute of Advanced Manufacturing Technology, Ningbo Institute of Materials Technology and Engineering, Chinese Academy of Sciences, Ningbo 315201, China;

2. College of Mechanical Engineering and Mechanics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Aiming at the problem of the traditional interpolation methods such as the error and the velocity fluctuation are large, the interpolation principle, the velocity planning and the interpolation parameter calculation of NURBS curve were researched. That the large chord error, large normal acceleration, and large tangential acceleration were all considered. A new NURBS interpolation algorithm based on Hamming method was proposed. The parametric prediction formula based on Hamming method was instructed specifically and the parametric emendation mechanism based on Lagrange was elaborated in detail. Matlab was used to simulate. The results indicate that the proposed method can simplify the calculation of interpolation parameter to meet the real-time requirement, improve the interpolation precision and restrain the great acceleration and the velocity fluctuation effectively.

Key words: NURBS curve; real-time interpolation; velocity planning; Hamming method; prediction emendation

0 引 言

在高速高精度的现代加工业中,传统的计算机数 字控制(computer numerical control, CNC)系统需将零 件曲线曲面离散成大量的微小线段或圆弧,然后进行 直线插补或圆弧插补的方法所带来的缺点愈发突出, 表现为程序代码量大、程序传输负载大、逼近误差大、 速度进给波动大和加工效率低等。相比而言,NURBS (non-uniform rational B-splines)曲线插补能够克服上 述缺点^[1],具有重要的研究意义。

收稿日期:2015-11-23

基金项目:浙江省自然科学基金项目(LY15E050005)

作者简介:金荣益(1990-),男,浙江慈溪人,硕士研究生,主要从事数控技术、高速高精度运动控制等方面的研究. E-mail: 15728046941@163. com 通信联系人:竺韵德,男,研究员,博士生导师. E-mail: zhuyd@ ysweb. com

NURBS 曲线插补分为参数插补与轨迹计算两个 过程。首先,参数插补在第*i*个插补周期内根据期望 步长 ΔL_i ,求得下一个插补点的参数 u_{i+1} ;然后轨迹计 算将插补点的参数 u_{i+1} 代入 NURBS 曲线方程中,得到 三维空间里的新插补点的坐标。

传统的参数插补方法采用一阶 Taylor 展开法计算 插补点的参数 u_{i+1}^[2],截断误差比较大,会造成比较大 的进给速度波动。而二阶 Taylor 展开法在计算插补参 数的过程中^[3],会涉及到复杂的一阶、二阶导数计算, 无法使插补的实时性得到保证。游有鹏等^[4]率先使 用差分替代微分的方法,代入插补点参数的 Taylor 展 开式,推出插补点参数的递推估算公式,降低了计算 量,但牺牲了精度。刘新山等^[5]提出了一种基于阿当 姆斯微分方程的 NURBS 曲线实时插补算法,通过合 理简化与近似,保证了算法的实时性。但其存在迭代 精度不高、速度波动率大等缺点,且无法防止进给方向 加速度过大。任杰青等^[6]利用 Muller 法迭代计算满 足进给步长要求的插补参数,避免了复杂求导运算,降 低了速度波动率。但该方法每次计算均涉及到二次方 程的求解,且未考虑进给方向加速度过大的情况。

笔者在以上研究的基础上,提出基于 Hamming 法 的新型 NURBS 曲线插补算法。该算法首先进行速度 规划,得到期望进给步长,约束弓高误差,限制法向以 及进给方向的加速度,保证加工精度;然后以基于 Hamming 法的简单线性递推得到插补参数的预估值; 最后用 Lagrange 线性插值进行迭代得到插补参数最终 的校正值。

1 NURBS 曲线简介

一条 k 次 NURBS 曲线可以表示为一分段有理多 项式矢函数^[7]:

$$p(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i d_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i N_{i,k}(u)}$$
(1)

式中: $d_i(i = 0, 1, ..., n)$ — 控制顶点,顺序连接成控制 多边形; $w_i(i = 0, 1, ..., n)$ — 权或权因子,分别与控制 顶点 $d_i(i = 0, 1, ..., n)$ 相联系。

首末权因子 $w_0 > 0, w_1 > 0$,而其余的权因子 $w_i(i = 1, ..., n - 1) \ge 0$,且顺序 k 个权因子不同时为零,以防止分母为零、保留凸包性质及曲线不致因权因子而退化为一点。

 $N_{i,k}(u)(i = 0, 1, ..., n)$ 由节点矢量 $U = [u_0, u_1, ..., u_{n+k+1}]$ 按 de Boor-Cox 递推公式决定的 k 次规

范 B 样条基函数。de Boor-Cox 递推公式:

$$\begin{cases} N_{i,0} = \begin{cases} 1, u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, \notin \mathbb{H} \\ \\ N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u} N_{i,k-1}(u) + \\ \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \\ \\ & \Re \stackrel{\circ}{\equiv} \frac{0}{0} = 0 \end{cases}$$

$$(2)$$

对于非周期 NURBS 曲线, 常将两端节点的重复度 取为 k + 1, 即 $u_0 = u_1 = \dots = u_k$, $u_{n+1} = u_{n+2} = \dots = u_{n+k+1}$ 。且在大多数实际运用里, 端点值分别取为 0 和 1。 即 $u_0 = u_1 = \dots = u_k = 0$, $u_{n+1} = u_{n+2} = \dots = u_{n+k+1} = 1$ 。因此, $u \in [u_k, u_{n+1}] = [0, 1]$ 。

2 NURBS 曲线插补的速度规划

NURBS 曲线插补首先需解决速度规划问题。插补 过程中,进给步长由进给速度和插补周期确定。一般来 说,同一条 NURBS 曲线的插补周期相同,因此对 NURBS 曲线插补进行对速度规划相当于进行进给步 长规划。在没有其他任何限制条件的情况下,进给步长 为:

$$\Delta L_{i,1} = v_{\max} T \tag{3}$$

式中:v_{max}一最大进给速度。

为了降低误差,避免加速度造成的冲击过大,期望 进给步长 ΔL_i 应将弓高误差、法向加速度及进给加速 度等方面均考虑在内^[8]。

2.1 弓高误差约束

由于 NURBS 曲线插补利用进给步长为单位的直 线段逼近实际曲线,研究者需考虑以直代曲造成的弓 高误差。

受最大弓高误差 h_{max} 约束的步长为^[9]:

$$\Delta L_{i,2} \approx \sqrt{8\rho_i \delta_{\max}} \tag{4}$$

式中: ρ_i —当前插补参数 u_i 处的曲率半径。

为避免计算 ρ_i ,将公式(4)转化为:

$$\Delta L_{i,2} \approx \sqrt{\frac{h_{\max}}{h_i}} \Delta \hat{L}_i \tag{5}$$

式中: \hat{h}_i — 预估插补参数对应的弓高误差, $\Delta \hat{L}_i$ — 预估 进给步长。

为避免求 \hat{h}_i 涉及到复杂的导数计算,且预估进给 步长 $\Delta \hat{L}_i$ 相对于曲线的曲率半径要小太多,本研究采 用曲线段中点与该段弦线中点的直线距离近似替代弓 高误差 \hat{h}_i ,即:

$$\hat{h}_{i} = \left| \frac{p(u_{i}) + p(\hat{u}_{i+1})}{2} - p\left(\frac{u_{i} + \hat{u}_{i+1}}{2}\right) \right| \quad (6)$$

式中: û_{i+1} 一下一插补周期的插补参数预估值。

2.2 法向加速度约束

最大法向加速度 a_{Nmax} 约束步长 $\Delta L_{i,3}$ 为:

$$\Delta L_{i,3} = T \sqrt{a_{Nmax} \rho_i}$$
(7)

同样为避免计算 ρ_i ,将公式(7)转化为:

$$\Delta L_{i,3} = T \sqrt{\frac{a_{N \max}}{8h_{\max}}} \Delta l_{i,2}$$
(8)

期望进给步长 ΔL_i 为 $\Delta L_{i,1}$ 、 $\Delta L_{i,2}$ 、 $\Delta L_{i,3}$ 三者中的最小值,即:

$$\Delta L_i = \min \left\{ \Delta L_{i,1}, \Delta L_{i,2}, \Delta L_{i,3} \right\}$$
(9)

此时,ΔL_i已经满足弓高误差和法向加速度的约 束,但是进给加速度并没有得到限制,故需对上述ΔL_i 进行处理。

2.3 进给加速度约束

为了使进给加速度不超过允许范围^[10],当处于加速阶段时,期望进给步长必须满足 $\Delta l_i - \Delta l_{i-1} \leq T^2 a_{\tau max}$;当处于减速阶段时,期望进给步长必须满足 $\Delta l_i - \Delta l_{i-1} \geq -T^2 a_{\tau max}$ 。

对期望进给步长具体处理为:

(1) 当 $\Delta l_i - \Delta l_{i-1} \ge T^2 a_{\tau \max}$ 时,令 $\Delta l_i = \Delta l_{i-1} + T^2 a_{\tau \max \circ}$

(2) 当 $\Delta l_i - \Delta l_{i-1} \leq -T^2 a_{\tau max}$ 时,以此时 A 点的 期望进给步长 ΔL_i 作为曲线加工的起始步长,以 $-T^2 a_{\tau max}$ 的步长变化量向前追溯,直到找到一插补点 B,使得 B 点与其前一插补点的步长差不小于 $-T^2 a_{\tau max}$ 。以 B 点为起始点,以 $a_{\tau max}$ 为加速度进行减 速运动,对期望进给步长进行重新规划,直到 A 点 为止。

综上所述,得到最终的期望进给步长 ΔL_i。随后就 可计算与期望进给步长 ΔL_i 相适应的下一个插补点参 数 u_{i+1}。

3 基于 Hamming 法的插补参数计算

本研究提出基于 Hamming 法的新型插补算法用 于计算下一插补点的参数 u_{i+1}。该算法通过对 Hamming 方法计算公式进行差分代微分处理,彻底回 避了导数的求解,大大减低了计算量,满足了插补的实 时性要求。同时本研究通过 Lagrange 一次线性插值公 式的合理运用,极大地提高了校正效率,进而提高了插 补精度,减低了速度波动率。

3.1 基于 Hamming 法的参数预估

根据文献[11],Hamming方法计算公式为:

$$y_{n+1} = \frac{1}{8}(9y_n - y_{n-2}) + \frac{3}{8}h(y'_{n+1} + 2y'_n - y'_{n-1})$$
(10)

式中:h-n - 1 时刻与 n 时刻之间的步长; y'_{n+1}, y'_n , $y'_{n+1}-n + 1, n, n - 1$ 时刻 y 的一阶导数。

令
$$y_{n+1} = u_{i+1}, y_n = u_i, y_{n-1} = u_{i-1}, h = T, y'_{n+1} = \dot{u}_{i+1}, y'_n = \dot{u}_i, y'_{n-1} = \dot{u}_{i-1},$$
则公式(10) 转化为:
 $u_{i+1} = \frac{1}{2}(9u_i - u_{i-2}) +$

$$\frac{3}{8}T(\dot{u}_{i+1} + 2\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1})$$
(11)

本研究利用一阶前向差分、后向差分结合代替一 阶微分的方法对式进行简化来避免复杂的隐式方程求 解及导数运算,保证插补的实时性。为了减小差分代替 微分的过程中引起的误差,笔者运用不同的前后差分 组合来得到两个参数递推预估公式,得到下一个插补 点的两个预估参数:

$$\hat{u}_{i+1,1} = 3u_i - 3u_{i-1} + u_{i-2}$$
(12)

$$\hat{u}_{i+1,2} = \frac{1}{5} (9u_i - 3u_{i-1} - u_{i-2})$$
(13)

3.2 插补点参数的校正

本研究将预估的插补点参数 $\hat{u}_{i+1,1}$ 、 $\hat{u}_{i+1,2}$ 分别代入 NURBS 曲线方程可计算出三维空间预估的新插补点, 从而得到预估进给步长 $\hat{u}_{i+1,1}$ 、 $\hat{u}_{i+1,2}$ 。由于没有对弓高 误差、法向加速度和进给加速度进行监控,难以保证插 补精度,需要对预估插补参数进行校正。

本研究采用 Lagrange 一次线性插值公式得到插 补点参数 \hat{u}_{i+1} :

$$\hat{u}_{i+1} = \hat{u}_{i+1,1} + \frac{\hat{u}_{i+1,1} - \hat{u}_{i+1,2}}{\Delta \hat{L}_{i,1} - \Delta \hat{L}_{i,2}} (\Delta \hat{L}_i - \Delta \hat{L}_{i,1}) \quad (14)$$

对应的预估进给步长为:

$$\Delta \hat{L}_i = |p(\hat{u}_{i+1}) - p(u_i)| =$$

 $\sqrt{(\hat{x}_{i+1} - x_i)^2 + (\hat{y}_{i+1} - y_i)^2 + (\hat{z}_{i+1} - z_i)^2}$ (15) Lagrange 一次线性插值可回避传统方法中由于插

补点之间的参数增量与进给步长不成固定比例所引起的误差,提升校正的效果^[12]。

预估校正得到的进给步长 $\Delta \hat{L}_i$ 和期望进给步长 ΔL_i 之间的偏差 δ_i 可用下式进行评定:

$$\delta_i = \left| \frac{\Delta \hat{L}_i - \Delta L_i}{\Delta L_i} \right| \tag{16}$$

本研究从 $\{\hat{u}_{i+1,i},\hat{u}_{i+1,i},\hat{u}_{i+1,2}\}$ 中选择更靠近 u_{i+1} 的

两点为新的 $\hat{u}_{i+1,1}$ 和 $\hat{u}_{i+1,2}$,进行迭代校正。直到满足偏差 在允许范围内或者迭代到指定次数等条件时,结束对预 估插补点参数 \hat{u}_{i+1} 的校正,得到最终的插补点参数 u_{i+1} 。

4 实验及结果分析

为评估本研究所提出的插补算法的正确性和有效 性,笔者采用 Matlab 软件对 NURBS 曲线进行仿真分 析。同时为了进一步说明该算法的优越性,本研究在 Matlab 仿真实验中将该算法与已有算法进行比较分析。

表1 NURBS 曲线参数

所选 NURBS 曲线参数如表1 所示。

参数名称	数值	
控制顶点 d/mm	(0,0), (-150, -150), (-150, 150),	
	(0,0),(150,-150),(150,150),(0,0)	
节点矢量 u	(0,0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1)	
权重 w	(1,10,10,1,10,10,1)	
次数 k	3	



同时笔者设定在插补 NURBS 曲线时各项参数, 如表2 所示。

表 2 NURBS 曲线插补参数

NURBS 曲线插补参数名称	参数值
最大进给速度 v _{max} /(mm・s ⁻¹)	300
插补周期 T/ms	1
最大允许弓高误差 $h_{max}/\mu m$	1
最大允许法向加速度 <i>a_{nmax}/</i> (mm・s ⁻²)	4 900
最大允许进给加速度 $a_{\tau max}/(\text{ mm} \cdot \text{s}^{-2})$	2 400

仿真实验首先测试插补进给速度曲线以及弓高误差曲线。本研究算法保证了进给速度在最大进给速度 300 mm/s的范围内,且满足弓高误差最大为1 μm的 要求。

该实验进一步以文献[13]中的自适应预估校正 算法作为对比,测试本研究算法在控制速度波动以及 减小进给方向加速度方面的表现。

实验进给速度曲线如图2所示。



从对比实验可知,在插补过程中,本研究算法将最 大进给加速度绝对值减小至2400 mm/s²。文献[13]算 法的最大进给加速度绝对值达到约4493 mm/s²。与文 献[13]算法相比,本研究算法将最大进给加速度减小了 46.6%,证明了其能有效地抑制冲击,提高插补精度。



文献[13]算法进给加速度曲线如图5所示。



两种算法均只对期望进给步长校正一次。本研究 算法将速度波动率控制在 0.005% 的范围内, 而文献 [13]算法只能将速度波动率控制在 0.015% 内。由此 可得出结论, 在控制进给速度波动方面, 本研究算法较 文献[13]算法降低了 2 倍, 具有更好的表现, 使用本 研究算法和文献[13]算法进行插补时, 速度波动率变 化曲线图如图 6、图 7 所示。



5 结束语

本研究提出了基于 Hamming 法的新型参数预估 -校正 NURBS 曲线插补算法。该算法首先进行速度 规划,得到期望进给步长,约束弓高误差,限制法向及 进给方向的加速度,以保证精度。将基于 Hamming 法 的简化公式线性递推得到插补参数的预估值;并用 Lagrange 线性插值进行迭代得到插补参数最终的校 正值。

仿真结果表明,该算法大大简化了参数插补的计

算,保证了插补的实时性,同时提高了插补精度,并对 加速度过大及速度波动进行了限制,具有良好的效果。

参考文献(References):

- [1] CHENG C W, TASI M C. Real-time variable feed rate NURBS curve interpolator for CNC machining[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology,2004,23(11-12):865-873.
- [2] FAROUKI R T, TSAI Y F. Exact Taylor series coefficients for variable-feed rate CNC curve interpolations [J]. Computer-Aided Design, 2001, 33(2):155-165.
- [3] DU DAO-SHAN, LIU YA-DONG, GUO XING-GUI, et al. An accurate adaptive NURBS curve interpolator with realtime flexible acceleration/deceleration control[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2010, 26(4): 273-281.
- [4] 游有鹏,王 珉,朱剑英. NURBS 曲线高速高精加工的插
 补控制[J]. 计算机辅助设计与图形学学报,2001,13
 (10):943-947.
- [5] 刘新山,贾庆祥,袁修华. NURBS 曲线插补算法及加减速 控制研究[J]. 组合机床与自动化加工技术,2007,44 (11):60-64.
- [6] 任杰青,刘 凯,赵东标. 基于 Muller 法的 NURBS 曲线插 补算法[J]. 现代制造工程,2014,35(8):55-59.
- [7] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京:高等教育出版社,2001.
- [8] 李建刚,张婷华,李泽湘,等.一种完善的自适应 NURBS 曲线插补算法[J].中国机械工程,2008,19(9):1095-1102.
- [9] 王田苗,曹宇男,陈友东,等. 基于 deBoor 算法的 NURBS 曲线插补和自适应速度控制研究[J]. 中国机械工程, 2007,18(21):2608-2613.
- [10] 王海涛,赵东标,陆永华.参数曲线柔性加减速前瞻控制 算法[J].中国机械工程,2012,23(3):769-772.
- [11] 吴勃英.数值分析原理[M].北京:科学出版社,2003.
- [12] 李 芳,永 年.一种参数预估-校正的 NURBS 曲线插 补算法研究[J].现代制造工程,2013,34(2):46-48.
- [13] 贾庆祥, 徐知行, 刘新山. 基于阿当姆斯算法的 NURBS 曲线插补[J]. 吉林大学学报:工学版, 2009, 39(3):215-218.

[**编辑:**李 辉]

本文引用格式:

JIN Rong-yi, ZHU Yun-de, LI Guo-pin. New NURBS interpolation algorithm based on Hamming method[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2016,33(4):406-410. 《机电工程》杂志:http://www.meem.com.cn

金荣益, 竺韵德, 李国平. 基于 Hamming 法的新型 NURBS 曲线插补算法研究[J]. 机电工程, 2016, 33(4): 406-410.