

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2016.02.009

N 叶非圆锥齿轮的加工仿真研究

刘琴琴, 吕 刚

(1. 四川大学锦城学院 机械工程系, 四川 成都 611731;
2. 浙江大学自贡创新中心 机电装备及智能控制研发中心, 四川 自贡 643000)

摘要:针对 N 叶非圆锥齿轮节曲线会产生不连续等问题, 提出了一种新的非圆锥齿轮节曲线的设计方法, 该方法有效简化了非圆锥齿轮的设计。推导了非圆锥齿轮的节锥与球面的交线方程, 以该交线作为非圆锥齿轮的节曲线, 以球面渐开线锥齿轮为非圆锥齿轮的产形刀具, 建立了刀具的节面与非圆锥齿轮节面的数学模型, 提出了非圆锥齿轮齿廓的加工仿真算法; 该算法通过仿真锥齿轮刀具在非圆锥齿轮节面上的包络运动, 实现了对非圆锥齿轮齿廓的加工。研究表明, 通过对 Pascal 曲线锥齿轮节曲线的设计, 验证了该设计方法具有广泛的适用范围; 同时, 该算法对于提高非圆锥齿轮齿廓的加工效率也具有实际意义, 可以很好地用于齿廓产形中。

关键词:锥齿轮; 加工仿真; 节曲线; 产形刀具

中图分类号: TH122; TH132.41

文献标志码: A

文章编号: 1001-4551(2016)02-0169-05

Machining simulation of N -Lobed non-circular bevel gear

LIU Qin-qin, LV Gang

(1. Mechanical Engineering Department, Jincheng College of Sichuan University, Chengdu 611731, China; 2. R & D Center of Mechatronics and Intelligent Control, Zigong Innovation Center of Zhejiang University, Zigong 643000, China)

Abstract: In order to solve pitch curves of N -Lobed non-circular bevel gear being discontinuous, a novel pitch curve design method for non-circular bevel gear (NCBG) was presented to simplify design of NCBG, the intersection curve equations between pitch cone surface of non-circular gear and spherical surface were derived, and the intersection curve was taken as pitch curve of NCBGs. Bevel gear with spherical involute was considered as generating cutter of NCBGs tooth profile, and mathematical models between pitch surface of bevel gear cutter and that of NCBGs were established. Based on this model, a machining simulation algorithm was developed. Based on simulation to enveloping motion on pitch curves of non-circular bevel gear, the process of the non-circular bevel gear can be achieved. The results indicate that by designing Pascal curves of bevel gear, the design method is extensive applicable value, and algorithm is practical for improving processing efficiency of non-circular bevel gear, while generating curves of tooth profile can be taken by using machining simulation algorithm.

Key words: bevel gear; machining simulation; pitch curve; generating cutter

0 引 言

非圆锥齿轮用于交错轴的变速传动, 然而非圆锥齿轮的设计和计算比平行轴的非圆齿轮复杂得多, 从而在很大程度上限制了其在机械产品中的应用。国内外一些学者对非圆齿轮进行了较为深入的研究:

Faydor L. Litvin^[1-2] 提出了偏心齿轮齿廓的设计和产形方法, 李建刚^[3] 提出了非圆齿轮齿廓根切的计算方法, Bing-Wen Bair^[4] 依据齿轮副与齿条刀具之间的产形方法推导了椭圆齿轮的设计和制造方法。Wei Hu^[5] 应用 2 次插值方法减小了椭圆齿轮加工误差。此外, 二次曲线、Pascal 曲线及多段圆弧曲线也已经被

用非圆齿轮的设计过程中^[6],文献[7]还讨论了椭圆、偏心圆和 Pascal 曲线的修正方法。

目前,有关非圆锥齿轮的研究还仅限于圆锥齿轮的研究,其它类型的节曲线(如:Pascal 曲线、多段圆弧曲线)国内外还未有相关报道。文献[8-9]分析了 N 叶椭圆圆锥齿轮的节面产生方法,文献[10]提出了该非圆锥齿轮齿廓的方程和精确数学模型。

考虑到非圆锥齿轮的节面为凹凸节面,因此本研究采用球面渐开线圆锥齿轮齿廓作为非圆锥齿轮齿廓的产形刀具,通过非圆锥齿轮与产形刀具之间的啮合运动可仿真出该非圆锥齿轮的齿廓,由于非圆锥齿轮的节锥角为反正切函数,会引起节曲线函数的不连续,可通过节曲线函数的对称性和周期性来修正这些缺陷。

本研究基于非圆齿轮节锥与球面的交线,提出一种非圆锥齿轮节曲线的设计方法。该方法可被推广到其他类型非圆锥齿轮节面的设计过程中。笔者依据非圆锥齿轮与刀具之间的啮合关系,提出非圆锥齿轮齿廓的运动仿真算法。

1 非圆锥齿轮节曲线的设计

圆锥与球面之间的相交线如图 1 所示。

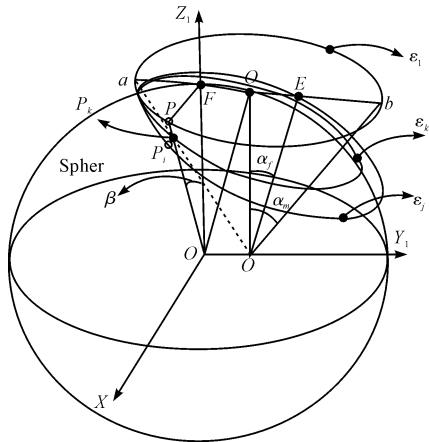


图 1 圆锥与球面之间的相交线

曲线 ε_k —圆锥 aO_1b 与球面之间的相交线; O_1 —点 O 在轴 Y_1 的投影;曲线 ε_j —椭圆曲线 ε_1 在球面上的投影;点 P_j —椭圆曲线 ε_1 上的任意点 P 在球面上的投影; P_k —曲线 ε_k 上的任意点;线 PP_k —圆锥的母线;角 β — O_1P 和轴 Z_1 之间的夹角

坐标系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 固连于球面,中心位于 O_1 球心。椭圆焦点 F_1 穿过轴 Z_1 且圆锥 aO_1b 的基锥面 aob 平行于平面 $X_1O_1Y_1$,椭圆 ε_1 的长半轴为 ab 且与球面切与焦点 F_1 。长半轴 O_b 对应的锥角为 α_m 。焦距 O_b 对应的锥角为 α_f 。

点 P, P_k, F_1 和 O_1 之间的几何关系如图 2 所示。

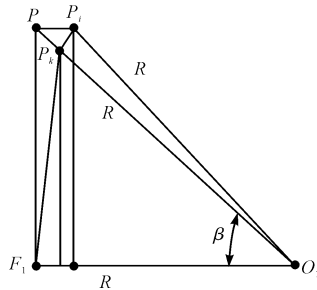


图 2 点 P, P_k, F_1 和 O_1 之间的几何关系

依据图 2 中的几何关系,线 O_1P_j, O_1P_k 和 O_1F_1 的长度相等,考虑到 F_1P 为椭圆节曲线 ε_1 的极半径且与球的半径 R 相等,因此可得:

$$\tan\beta = \frac{F_1P}{O_1F_1} \tag{1}$$

依据椭圆节曲线 ε_1 的极坐标方程, N 叶椭圆节曲线的表达式为:

$$F_1P = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(k_e \cdot \eta)} \tag{2}$$

式中: a —椭圆节曲线长半轴, e —椭圆的离心率, k_e —椭圆的叶数。

依据图 1 中的几何关系,设计参数 a 和 e 可表示为:

$$OO_1 = O_1F_1 = R \tag{3}$$

$$a = Ob = OO_1 \tan(\alpha_m) \tag{4}$$

$$OF_2 = OO_1 \tan(\alpha_f) \tag{5}$$

$$e = \frac{OF_2}{Ob} \tag{6}$$

将式(2~6)代入式(1)可得:

$$\tan\beta = \frac{\tan^2(\alpha_m) - \tan^2(\alpha_f)}{\tan(\alpha_m) + \tan(\alpha_f) \cdot \cos(k_e \eta)} \tag{7}$$

在坐标系 S_1 , N 叶圆锥齿轮的节曲线 ε_k 方程可表示为:

$$\begin{cases} x_{e1} = R \sin\beta \cos(\eta) \\ y_{e1} = R \sin\beta \sin(\eta), \beta = \beta(\eta). \\ z_{e1} = R \cos\beta \end{cases} \tag{8}$$

式中: η — N 叶圆锥齿轮的回转角, β —参数 η 的函数且由式(7)得到。

同理,其他类型 N 叶非圆锥齿轮也可以采用节锥面与球面之间的相交线作为其节曲线。Pascal 曲线锥与球面之间的交线如图 3 所示。依据图 3, N 叶 Pascal 曲线锥齿轮的节曲线 ε_{pk} 为 Pascal 曲线锥面 $hO_p d$ 与球面之间的相交线,曲线 ε_{pj} 为 N 叶 Pascal 曲线锥齿轮节曲线 ε_p 的投影。坐标系 $S_p(X_p, Y_p, Z_p)$ 的轴 Z_p 通过 Pascal 曲线齿轮节曲线的中心 O_q 和球面上的点 O_q 。点 O_p 为球面的中心,Pascal 曲线 ε_p 和 ε_{pj} 切于球面上

点 O_q , Pascal 曲线上任意点 c 的投影点为 c_j 。角 β_p 为 $O_p O_q$ 与 $O_p c$ 之间的夹角,点 c_{pj} 为曲线 ε_{pk} 、球面和 Pascal 曲线锥面 $hO_p d$ 的母线 $O_p c$ 之间的夹角。点 c, c_{pj}, c_j 和 O_p 之间的几何关系如图 4 所示。

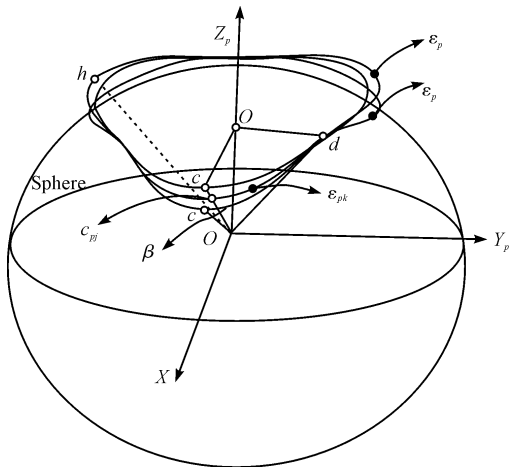


图3 Pascal 曲线锥与球面之间的交线

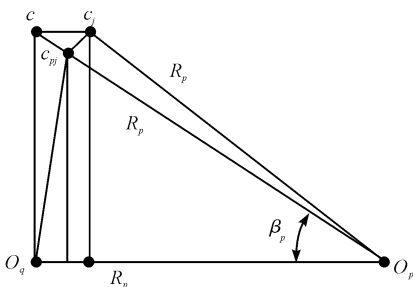


图4 点 c, c_{pj}, c_j 和 O_p 之间的几何关系

依据图 4 中的几何关系,线 $O_p O_q, O_p c_j$ 和 $O_p c_{pj}$ 的长度相等, $O_q c$ 为 Pascal 曲线齿轮的极坐标。依据文献[11-12], Pascal 曲线的方程为:

$$O_q c = b \cdot \cos(h_p \cdot \eta_p) + l \quad (9)$$

式中: b —Pascal 曲线的幅值, h_p —Pascal 曲线锥齿轮节曲线的叶数, R_p —球面半径, l —可调系数。

依据图 4 中的几何关系,角 β_p 可表示为:

$$\tan \beta_p = \frac{c O_q}{O_p O_q} = \frac{O_q c}{R_p} \quad (10)$$

将式(9)代入式(10)并重新整理后可得:

$$\tan \beta_p = \frac{b \cdot \cos(h_p \cdot \eta_p) + l}{R_p} \quad (11)$$

将 N 叶 Pascal 曲线的节曲线表示在坐标系 S_p 可得:

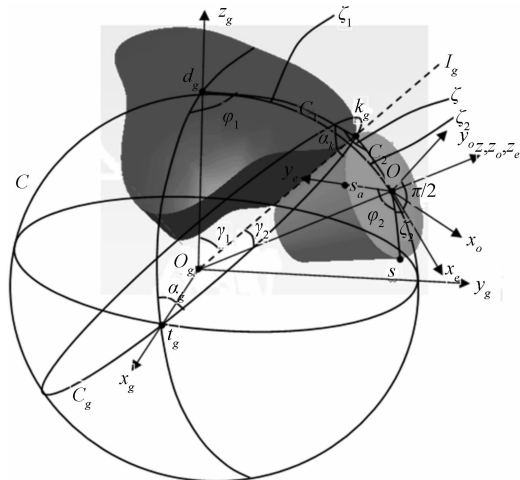
$$\begin{cases} x_p = R_p \sin \beta_p \cos(\eta_p) \\ y_p = R_p \sin \beta_p \sin(\eta_p), \beta_p = \beta_p(\eta_p) \\ z_p = R_p \cos \beta_p \end{cases} \quad (12)$$

式中: η_p — N 叶 Pascal 曲线锥齿轮的回转角, β_p —参数

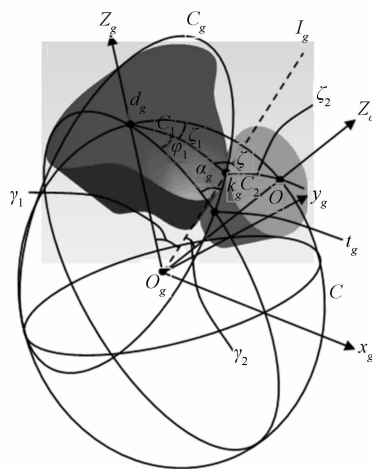
η_p 的函数,且可由式(11)得到。

2 *N* 叶非圆锥齿轮与球面锥齿轮刀具的啮合关系

3 叶非圆锥齿轮与其产形刀具的啮合关系如图 5 所示。



(a) 刀具与锥齿轮节面在凸起部右侧的啮合状态



(b) 刀具与锥齿轮节面在凸起部左侧的啮合状态

图5 三叶非圆锥齿轮与其产形刀具的啮合关系

S_o —锥齿轮刀具的初始位置; $S_c(x_c, y_c, z_c)$ —刀具的旋转坐标系且固连于刀具的大端面; I_g —顺时针回转轴; k_g — N 叶非圆锥齿轮与产形刀具之间的切点; γ_1 —轴 z_g 与轴 I_g 之间的夹角; γ_2 —轴 z_o 与轴 I_g 之间的夹角; C_g — N 叶非圆锥齿轮与刀具之间的切平面; C —通过轴 z_g 与轴 z_o 的大圆弧; C_1 —从轴 z_g 到切点 k_g 的大圆弧,其对应的中心角为 γ_1 ; C_2 —从轴 z_c 到切点 k_g 的大圆弧,其对应的中心角为 γ_2 ; N, γ_2, t_g —弧 C_g 和平面 $x_g o_g z_g$ 的交点; φ_1 — N 叶非圆锥齿轮的回转角; ζ, ζ_1, ζ_2 —弧 C_1, C_2 和 C 之间的夹角(注意 ζ, ζ_1 和 ζ_2 为二面角)

坐标系 $S_g(x_g, y_g, z_g)$ 固连于 N 叶非圆齿轮的节

锥面,坐标系 $S_o(x_o, y_o, z_o)$ 固连于锥齿轮刀具的节面。

假设 N 叶非圆齿轮的大端节曲线为 N 叶椭圆,切平面 C_g 的法向量 \mathbf{n}_e 可表示为:

$$\mathbf{n}_e = (x_e, y_e, z_e),$$

$$\mathbf{x}_e = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_e}{\partial R} \\ \frac{\partial y_e}{\partial \eta} \end{vmatrix}, \mathbf{y}_e = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_e}{\partial R} \\ \frac{\partial x_e}{\partial \eta} \end{vmatrix}, \mathbf{z}_e = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_e}{\partial R} \\ \frac{\partial x_e}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (13)$$

联立式(8)与式(13),可得:

$$\begin{cases} x_e = -R(\beta' \sin(\eta) + \sin(\beta) \cos(\beta) \cos(\eta)) \\ y_e = R(\beta' \cos(\eta) - \sin(\beta) \cos(\beta) \sin(\eta)) \\ z_e = R \sin^2(\beta) \end{cases}$$

$$\beta' = \left(\frac{1}{1 + \left(\tan^{-1} \left(\frac{\tan^2(\alpha_m) - \tan^2(\alpha_f)}{\tan(\alpha_m) + \tan(\alpha_f) \cos(k_e \eta)} \right) \right)^2} \right) \times$$

$$\left(\frac{k_e \sin(k_e \eta) \tan(\alpha_f) (\tan^2(\alpha_m) - \tan^2(\alpha_f))}{(\tan(\alpha_m) + \tan(\alpha_f) \cos(k_e \eta))^2} \right) \quad (14)$$

式中: η 与图5(a)中的角 φ_1 相等, β 与图5(a)中的角 γ_1 相等。考虑到图5中平面 $x_g o_g z_g$ 的法向量 $\mathbf{n}_g = \{0, 1, 0\}$,法向量 \mathbf{n}_e 与 \mathbf{n}_g 之间的夹角为 $\pi - \alpha_g$ 。其中 α_g 为 C_g 与平面 $x_g y_g$ 之间的二面角,在球面三角形 $dgkgtg$ 中,依据球面三角余弦定律,可得:

$$\alpha_g = \cos^{-1} \left(\frac{-\beta' \cos(\eta) + \sin(\beta) \cos(\beta) \sin(\eta)}{\sqrt{\beta'^2 + \sin^2(\beta)}} \right) \quad (15)$$

$$\angle k_g o_g t_g = \sin^{-1} \left(\frac{\sin(\beta) \sin(\eta)}{\sin(\alpha_g)} \right) \quad (16)$$

$$\alpha_k = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\cos \left(\frac{\angle k_g o_g t_g - \beta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\angle k_g o_g t_g + \beta}{2} \right) \tan \left(\frac{\eta + \alpha_g}{2} \right)} \right) \quad (17)$$

式中: α_k —弧 C_g 与 C_1 之间的二面角。

由于 C_2 垂直于切面 C_g ,二面角 $\angle t_g k_g o_e$ 为 $\pi/2$,二面角 $\xi = \alpha_k + \angle t_g k_g o_e = \alpha_k + \pi/2$,假设锥齿轮刀具位于 N 叶非圆锥齿轮节面的不同位置,其二面角的计算方法也不同,3叶非圆锥齿轮与其产形刀具的啮合关系如图5(a)、5(b)所示。

此外,在球面三角形 $k_g d_g o_e, \zeta_1, \zeta_2$ 和 $\angle d_g o_g o_e$ 可表示为:

$$\angle d_g o_g o_e = \cos^{-1} (\cos(\beta) \cos(\gamma_2) - \sin(\beta) \sin(\gamma_2) \sin(\alpha_k)),$$

$$\beta = \gamma_1 \quad (18)$$

$$\xi_1 = \sin^{-1} \left(\frac{-\sin(\gamma_2) \cos(\alpha_k)}{\sin(\angle d_g o_g o_e)} \right) \quad (19)$$

$$\xi_2 = \sin^{-1} \left(\frac{\sin(\xi_2) \sin(\gamma_1)}{\sin(\gamma_2)} \right) \quad (20)$$

为了仿真加工的整个过程,必须计算出球面锥齿轮刀具在坐标系 S_g 中的中心坐标,令 N 叶非圆锥齿轮的节曲面固定且球面锥齿轮刀具绕着轴 z_g 回转,在球面坐标系 S_g 中,球面锥齿轮刀具的中心点坐标计算式为:

$$R_{og} = M_{oy} M_{yg} R_o, R_o = (x_o, y_o, z_o, 1) \quad (21)$$

$$M_{oy} = \begin{vmatrix} \cos(\angle d_g o_g o_e) & 0 & \sin(\angle d_g o_g o_e) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\angle d_g o_g o_e) & 0 & \cos(\angle d_g o_g o_e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (22)$$

$$M_{yg} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_1 - \xi_1) & -\sin(\varphi_1 - \xi_1) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi_1 - \xi_1) & \cos(\varphi_1 - \xi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (23)$$

式中: M_{oy}, M_{yg} —绕着轴 y_g 和轴 z_g 旋转的回转矩阵,本研究中 $R_o = (0, 0, R, 1)$ 。

假定图5(a)中从点 s_b 到点 s_a 之间的弧长与锥齿轮刀具从 N 叶非圆齿轮刀具的起始位置回转到该位置的弧长相等。 $\widehat{s_a s_b}$ 对应的中心角为 φ_2 ,针对图5(b)中的情况,节面绕轴 z_o 的回转角为 $\pi/2 + \zeta_2 + \varphi_2$ 。轴 y_o 与轴 y_e 之间的二面角为 $\pi/2 + \zeta_2 + \varphi_2$ 。其中 ζ_2 由式(20)得到, φ_2 的计算式为:

$$\varphi_2 = \frac{l_s}{R \sin(\gamma_2)} = \frac{\int_0^\eta \sqrt{\left(\frac{\partial x_e}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_e}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_e}{\partial \eta} \right)^2} d\eta}{R \sin(\gamma_2)} \quad (24)$$

式中: l_s — N 叶非圆锥齿轮节曲线大端的弧长,上式分子的积分式可通过文献[12]的方式计算。

锥齿轮刀具每个区域的齿廓都可表示在坐标系 S_g 中,其变换方程为:

$$\begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} = M_{eo} M_{oy} M_{yg} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}, i = l, r, c, d, A.$$

$$M_{eo} = \begin{Bmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \zeta_2 + \varphi_2 \right) & -\sin \left(\frac{\pi}{2} + \zeta_2 + \varphi_2 \right) & 0 & 0 \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \zeta_2 + \varphi_2 \right) & \cos \left(\frac{\pi}{2} + \zeta_2 + \varphi_2 \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

式中: x_i, y_i, z_i —刀具节面大端上弧在坐标系 S_g 中的坐标。

3 N 叶非圆锥齿轮齿廓的加工仿真算法

本研究基于 N 叶非圆锥齿轮与球面锥齿轮刀具之间的啮合关系提出了其加工仿真算法,其执行步骤如下:

步骤1:依据传动比函数确定出 N 叶非圆锥齿轮的齿数, N 叶非圆锥齿轮的大端节曲线可由式(8)或式(12)获得。

步骤2:依据 N 叶非圆锥齿轮的模数选择恰当的刀具,建立刀具与非圆锥齿轮之间的虚拟模型,依据刀具的旋转速度计算 N 叶非圆锥齿轮刀具的弧长。

步骤3:计算锥齿轮刀具在坐标系 S_g 中的中心点坐标。

步骤4:球面锥齿轮刀具的虚拟模型代入式(25)得到 N 叶非圆锥齿轮刀具的齿廓模型。

同理,其他类型节曲线的非圆锥齿轮刀具的节曲线也可采用该方法获得,此外还可依据以上算法来检测 N 叶非圆锥齿轮刀具的根切和齿顶过切现象。

4 结束语

(1)本研究通过建立非圆齿轮节锥面与球面交线方程,提出了一种非圆锥齿轮节曲线的设计方法,为其他类型非圆锥齿轮设计奠定了理论基础。

(2)基于非圆锥齿轮与其刀具之间的运动机理,本研究建立了刀具包络非圆锥齿轮齿廓的数学模型,对于非圆锥齿轮齿廓的产形具有积极的意义。

(3)针对非圆锥齿轮节面的凹凸特性,本研究依据刀具与非圆锥齿轮内啮合和外啮合方法,提出了非圆锥齿轮齿廓的加工仿真算法,该算法能够有效地模拟非圆锥齿轮齿廓的产形过程,对于提高非圆锥齿轮齿廓的加工质量具有重大意义。

参考文献(References):

- [1] LITVIN F L. Design and investigation of gear drives with non-circular gears applied for speed variation and generation of functions[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2008, 197(45): 3783-3802.
- [2] LITVIN F L. 齿轮几何与应用[M]. 上海:上海科学技术出版社, 2008.
- [3] 李建刚, 吴序堂, 李泽湘. 基于插齿数值计算模型的非圆齿轮根切分析[J]. **农业机械学报**, 2007, 38(6): 138-142.
- [4] BAIR B W. Computer aided design of elliptical gears[J]. **Journal of Mechanical Design**, 2002, 124(4): 787-793.
- [5] HU Wei. Interpolation algorithm based on central angle division[J]. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, 2002, 42(4): 473-478.
- [6] 姚文席. 非圆齿轮设计[M]. 北京:机械工业出版社, 2013.
- [7] 刘永平, 吴序堂, 李鹤岐. 常见的凸封闭节曲线非圆齿轮副设计[J]. **农业机械学报**, 2007, 38(6): 143-146.
- [8] FIGLIOLINI G. Synthesis of the Pitch Surfaces of Non-Circular Skew-Gears [C]//ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Montreal: [s. n.]. 2010: 1195-1204.
- [9] FIGLIOLINI G, ANGELES J. Synthesis of the Pitch Cones of N-Lobed Elliptical Bevel Gears[J]. **ASME. Journal of Mechanical Design**, 2011, 133(3): 031002. 1-031002. 8.
- [10] XIA Ji-qiang, LIU Yuan-yuan. Noncircular Bevel Gear-Transmission With Intersecting Axes[J]. **ASME. Journal of Mechanical Design**, 2008, 130(5): 054502. 1-054502. 7.
- [11] 王亚洲, 胡赤兵, 刘永平, 等. Pascal 蜗线型齿轮滚切插补算法对比[J]. **上海交通大学学报**, 2014, 48(1): 45-49.
- [12] VARBERG D. 微积分[M]. 北京:机械工业出版社, 2011.

[编辑:李 辉]

本文引用格式:

刘琴琴, 吕 刚. N 叶非圆锥齿轮的加工仿真[J]. **机电工程**, 2016, 33(2): 169-173.

LIU Qin-qin, LV Gang. Machining simulation of N -Lobed non-circular bevel gear[J]. **Journal of Mechanical & Electrical Engineering**, 2016, 33(2): 169-173.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>