

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2015.08.009

矩形薄板通透开裂缝对固有频率 和模态的影响分析*

龚 健¹, 卢奂采^{1,2*}, 陈振安¹, 庄一舟³, 金江明¹

(1. 浙江工业大学 机械工程学院, 浙江 杭州 310014; 2. 浙江省信号处理重点实验室,
浙江 杭州 310014; 3. 福州大学 土木工程学院, 福建 福州 350108)

摘要: 针对四边固支矩形板薄受到通透开裂影响, 引起模态中固有频率和模态振型变化的问题, 对两种开裂位置中不同开裂长度进行了研究。首先, 应用 ANSYS 软件建立有限元模型; 然后, 对开裂裂缝平行于薄板短边且位于板中心(对称开裂)和不位于板中心(不对称开裂)的各 25 种裂缝长度进行了仿真计算, 获得了薄板的固有频率和模态振型。分析结果表明, 裂缝的长度和位置影响矩形薄板的固有频率和振型; 开裂的缝长和开裂中心位于节线上或者附近是产生模态交叉的两个重要因素, 可为板结构开裂的检测提供依据。

关键词: 矩形薄板; 通透开裂; 固有频率; 模态振型; 模态交叉

中图分类号: TH132.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-4551(2015)08-1061-05

Analysis on natural frequency and mode of clamped rectangular thin plate with all-through crack

GONG Jian¹, LU Huan-cai^{1,2}, CHEN Zhen-an¹, ZHUANG Yi-zhou³, JIN Jiang-ming¹

(1. College of Mechanical Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China;

2. Key Laboratory of Signal Processing of Zhejiang Province, Hangzhou 310014, China;

3. College of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: Aiming at the problem of the changes of natural frequencies and mode shapes of a clamped rectangular thin steel plate by an all-through crack, the plates with different lengths of cracks and two center of cracks were simulated. First of all, ANSYS software was used to build finite element models. Then it's calculated for 25 different lengths of cracks for both cases where cracks are paralleling to the short edges and at the center of thin plate as well as off the center of plate, and natural frequencies and mode shapes were obtained. The results indicate that the length and position of all-through crack change the natural frequencies and mode shapes of the plates, and the length exceeding critical value and the center of crack around nodal line are two major factors to the mode cross-over phenomena, which can provide the effective basis for the detection of plate-like with an all-through.

Key words: rectangular thin plate; all-through crack; modal frequency; mode shape; mode cross-over

0 引 言

板结构广泛应用于土木、机械和航天等工程领

域^[1-2], 因此, 板结构开裂后的振动响应及其特征一直是动力学领域研究的热点^[3-4], 其中矩形开裂薄板为重要的研究对象。

收稿日期: 2015-03-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51205354, 51275469); 浙江省国际合作重大专项资助项目(2013C14014)

作者简介: 龚 健(1989-), 男, 浙江龙游人, 主要从事装备与系统噪声源识别定位与控制方面的研究. E-mail: gongjian_svlab@163.com

通信联系人: 卢奂采, 女, 教授, 博士生导师. E-mail: huancailu@zjut.edu.cn

对于矩形薄板的模态响应,国内外学者做了深入的研究。众所周知,对于四边固支的无开裂的弹性薄板,根据薄板振动理论^[5-6],可求得板振动模态响应的解析解,但通透开裂薄板结构的振动模态响应,则没有解析解。L. Y. Shen 等^[7-8]在 1993 年,从理论上分析了开裂板的两类模态分裂(mode splitting)的情况,其研究结果解释了模态分裂的现象,但缺乏开裂板的振型函数等理论解。Asif Israr 等^[9]在 2008 年,较为详尽地推导了裂缝板的振动方程及固有频率公式,并对矩形铝板的振动响应进行了实验验证。樊久铭等^[10]在 2011 年,用有限元软件,分析了薄板裂缝的位置和深度等参数对矩形板模态振型和模态频率的影响,并进行了实验,结果表明裂缝的深度和位置对振型有较大的影响。郝晓克等^[11]在 2013 年,研究了矩形薄板的开裂特征及其声-振响应,从声学 and 振动的角度分析了开裂薄板的振型和固有频率的变化规律和影响。但是,目前的研究基本上未对矩形开裂薄板的模态交叉现象进行分析和解释。

因此,为了研究矩形通透开裂薄板的模态交叉问题,本研究首先给出矩形薄板在一定深度裂缝情况下的固有频率的计算公式,然后建立通透开裂薄板的有限元模型,通过仿真算例,分析薄板在对称开裂和不对称开裂时,随着开裂长度增大,板的固有频率变化与振型变化的趋势和规律,分析模态交叉现象发生的原因。

1 单条裂缝矩形薄板模态的基本理论

四边固支的矩形薄板,在具有单条裂缝的情况下,其模型如图 1 所示。

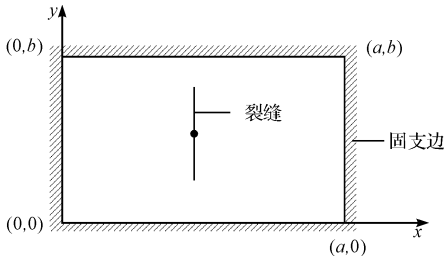


图 1 四边固支带开裂缝的矩形薄板示意图

设矩形薄板的挠度为 $w(x,y)$,可表示为各阶模态振型的叠加:

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (1)$$

式中: $X_m(x), Y_n(y)$ — x 和 y 方向的振型函数; m, n — x 和 y 方向的模态的阶数; A_{mn} —各阶模态的贡献。

具有裂缝特征的薄板的近似解的理论如文献[9]:当开裂中心位置为薄板中心,裂缝长度较短时,

广义质量 M_{mn} 和广义刚度 K_{mn} 分别为:

$$M_{mn} = \frac{\rho h}{D} A_{mn} \int_0^a \int_0^b X_m^2 Y_n^2 dx dy \quad (2)$$

$$K_{mn} = A_{mn} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^4 X_m Y_n}{\partial x^4 \partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 Y_n X_m}{\partial y^4 \partial x^4} - \frac{l_c}{39.55(3+\mu)(1-\mu)h+l_c} \left(\frac{\partial^4 X_m Y_n}{\partial x^4 \partial y^4} + \mu \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} \right) \right) X_m Y_n dx dy \quad (3)$$

式中: ρ —板的密度; h —板的厚度; a, b —矩形板的长和宽; D —抗弯刚度; l_c —裂缝的缝长; μ —板的泊松系数。

因此,可以推导开裂板的固有角频率 ω_{mn} 和频率 f_{mn} 分别为:

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{K_{mn}}{M_{mn}}}, f_{mn} = \omega_{mn}/2\pi \quad (4)$$

需要注意的是,上述公式只适用于裂缝深度与板厚度的比值在 70% 以下的情况,而对于通透开裂(裂缝深度与板厚度的比值为 100%)则不适用。因此,为了获得通透开裂薄板的模态信息,本研究采用有限元方法计算。

2 矩形通透开裂薄板模态的有限元仿真与分析

2.1 矩形通透开裂薄板的有限元模型

本研究利用 ANSYS 软件,建立有限元模型如下:对称开裂薄板的有限元模型如图 2(a)所示;不对称开裂的有限元模型如图 2(b)所示。

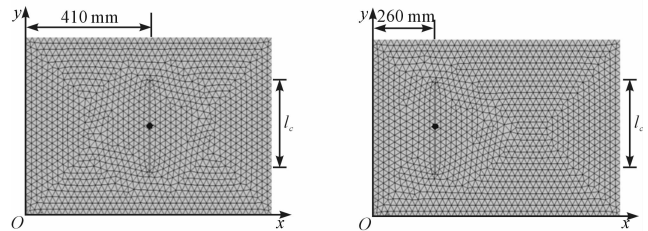


图 2 薄板不同开裂位置的有限元模型 (l_c —开裂缝长,开裂中的黑点表示开裂中心位置)

本研究采用弹性壳单元(shell 63),选取钢质材料,密度 $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,弹性模量 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$,泊松比 $\mu = 0.3$ 。

矩形薄板尺寸为 $820 \text{ mm} \times 520 \text{ mm} \times 1.5 \text{ mm}$,通透开裂是薄板和长方体(尺寸与开裂相同)通过差集(subtract)得到,尺寸为 $l_c \text{ mm} \times 0.2 \text{ mm} \times 1.5 \text{ mm}$ 。

网格设置取三角形单元(能够保证结果有非常高

的精度),单元边长 20 mm,自由划分网格。

薄板边界条件为四边固支。

2.2 对称开裂薄板的固有频率变化与模态交叉

如图 2(a)中 XOY 坐标系所示,设对称开裂薄板的

裂缝中心位于(410 mm,260 mm),且裂缝平行于薄板短边,开裂长度比 $\zeta = l_{c1}/b$ 即开裂长度与短边长度之比,以间隔 $\Delta\zeta = 4\%$ 增加时,仿真获得模态的固有频率 f_{mn} ,前 11 个模态固有频率与开裂长度比的关系曲线如图 3 所示。

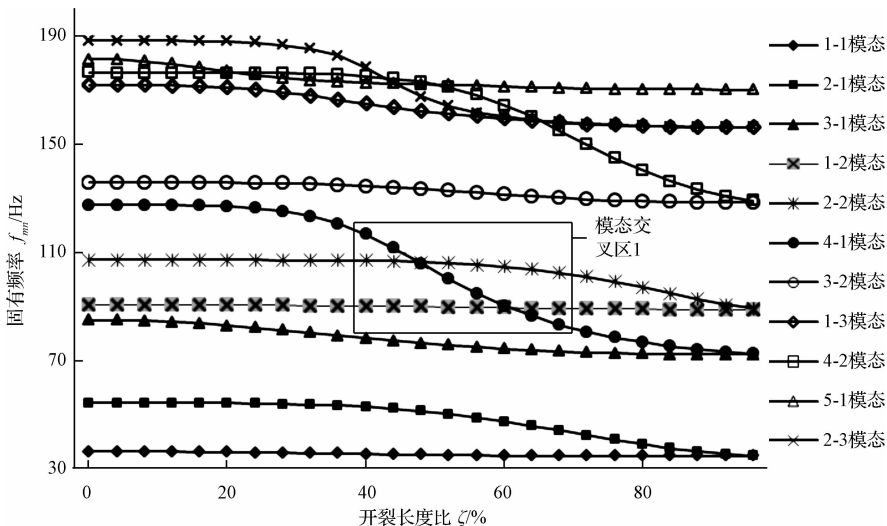


图 3 对称开裂板的前 11 个模态的固有频率 f_{mn} 与开裂长度比 ζ 的关系

从图 3 中可知,随着开裂长度比 ζ 增大,各阶模态的固有频率都随之下落,原因是板的刚度不断减小,完全吻合式(4)所揭示的规律。另外,随着 ζ 增大,各模态的固有频率 f_{mn} 呈‘z’形规律,即:在 $0 \leq \zeta \leq 20\%$ 和 $90\% \leq \zeta \leq 96\%$ 时,各阶模态的固有频率几乎不变;在某些开裂长度比的区间里,固有频率值改变则很明显,如 2-1 模态的固有频率 f_{21} 在 $50\% \leq \zeta \leq 80\%$ 时变化幅度较大;2-2 模态的固有频率 f_{22} 在 $70\% \leq \zeta \leq 90\%$ 时变化幅度较大。所以,各阶模态可根据固有频率变化规律分为 3 个级别:①频变级,表示频率变化特别显著,并改变了固有频率次序;②影响级,指频率变化较大但没有改变固有频率次序;③微影响级,即频率变化不大。具体划分如表 1 所示。

表 1 各阶模态的分类

级别	(m,n)阶模态
频变级	4-1 模态、4-2 模态、5-1 模态、2-3 模态等
影响级	2-1 模态、3-1 模态、2-2 模态、1-3 模态等
微影响级	1-1 模态、1-2 模态、3-2 模态等

频变级中如 4-1 模态,在图 3 的矩形框所示,当 $40\% \leq \zeta \leq 56\%$ 时,随着 ζ 增大,4-1 模态的固有频率 f_{41} 从 $f_{41} > f_{22}$ 变化到 $f_{41} < f_{22}$,像这种模态与对应的固有频率次序没有始终一一对应的现象,被称为模态交叉,如图 4 所示。同理,当 $56\% \leq \zeta \leq 70\%$ 时,4-1 模态的固有频率 f_{41} 从 $f_{41} > f_{12}$ 变化到 $f_{41} < f_{12}$,也发生了模态交叉。

由图 3 可知,当 $\zeta = 96\%$ 时,两个相邻的模态,诸如 $(2m, n)$ 阶模态与 $(2m - 1, n)$ 阶模态的固有频率几

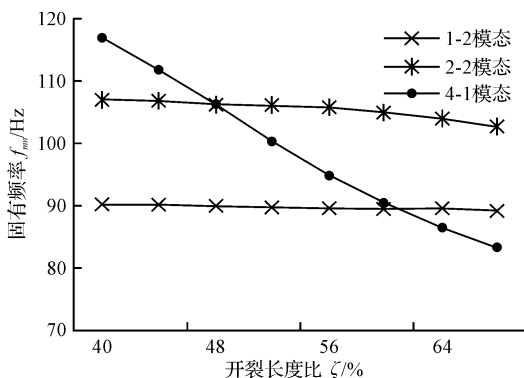


图 4 对称开裂板的模态交叉图

乎相同。这是因为此时薄板几乎分裂成两块,而这两块小板所有条件都相同,它们的固有频率相同。薄板的固有频率是由两块小板所决定的,因此,此类相邻两阶模态对应的固有频率相同。只是对于薄板整体而言,裂缝两侧的板的振动有以下两种组合:对称和相反。1-1 模态振型,裂缝两侧的振动对称如图 5(a)所示,2-1 模态,裂缝两侧的振动相反如图 5(b)所示。以及,3-1 模态振型和 4-1 模态振型如图 5(c),5(d)所示。更重要的是,薄板无开裂时,4-1 模态的固有频率 f_{41} 与 3-1 模态的固有频率 f_{31} 间隔 2 个频率。因此,随着 ζ 增大并最终 $f_{41} = f_{31}$, f_{41} 必然要跨越 f_{22} 和 f_{12} ,出现图 4 所示的模态交叉现象。这说明在对称开裂薄板中,开裂的缝长是产生模态交叉非常重要的因素。

另外,本研究将对称开裂板和无开裂板的固有频率作对比发现:对于 (m, n) 阶模态,当 m 是奇数时,频

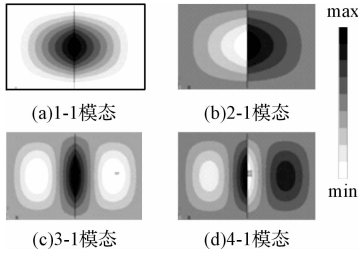


图 5 $\zeta = 96\%$ 时板的前 4 个模态振型图

率变化不大;当 m 是偶数时,频率变化很明显。也就是说,当开裂处于振型的波峰或者波谷位置时,开裂对板的固有频率的影响较小,但在节线(位移为零)位置时对频率的影响达到较大。这是因为开裂在节线位置时,有两方面对振型产生影响:

一方面是对振型函数在此处的斜率最大,以 x 方向为例,由于裂缝 Δx 存在,所以振型函数变化量 $\Delta X_m(x)$ 最大;

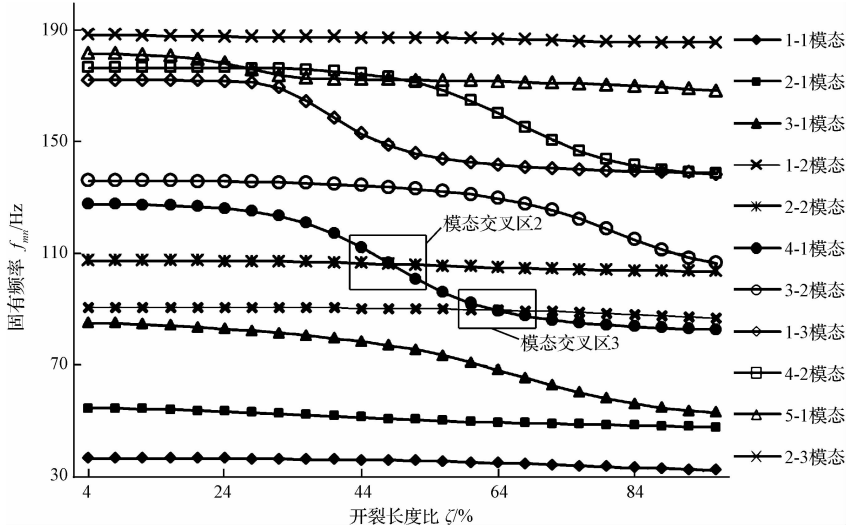
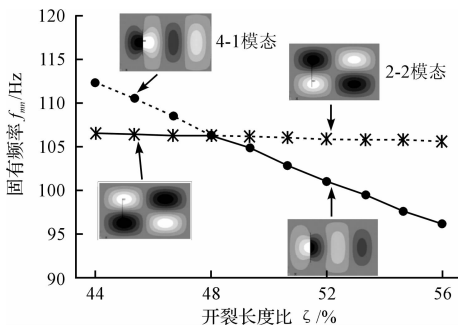


图 6 不对称开裂薄板前 11 个固有频率 f_{mn} 随开裂长度比 ζ 的变化

同样由图 6 可知,各阶模态的固有频率都有所降低,符合公式(4)中的趋势。根据固有频率变化的规律可以分为 3 个级别:

- ①频变级。如 4-1 模态、4-2 模态、5-1 模态;
- ②影响级。如 3-1 模态、1-3 模态、3-2 模态等;
- ③微影响级。如 1-1 模态、2-1 模态、1-2 模态、2-2



另一方面是当板无开裂时,节线两边的振动在方向相反的内应力作用下使得节线处的位移为零,而当几乎完全开裂时裂缝的边界处失去了另外一侧应力的约束,使得裂缝两侧的板产生背向振动,导致位移变化较大,如图 5(d) 中 4-1 模态振型,裂缝两侧为振动幅值最大值。

因此,对于同一个位置,不同振型函数的影响不同,说明开裂中心在节线上或者附近是产生模态交叉现象重要的因素之一。

2.3 不对称开裂薄板的固有频率变化与模态交叉

如图 2(b) 中 XOY 坐标系所示,设薄板裂缝开裂中心的坐标为(205 mm, 260 mm),开裂直缝平行于短边,薄板的其他参数与 2.2 节中算例的参数相同。前 11 个固有频率随开裂长度比 ζ 的变化曲线如图 6 所示。

模态、2-3 模态等。

模态交叉图如图 7(a) 所示。数据来源于图 6 的模态交叉区 2,选取当 $44\% \leq \zeta \leq 56\%$ 时, f_{22} 几乎没有发生变化,稳定在 106 Hz 左右,而 f_{41} 却从 117 Hz 减小到 99 Hz,发生了模态交叉。

模态交叉图如图 7(b) 所示。数据来源于图 6 中模

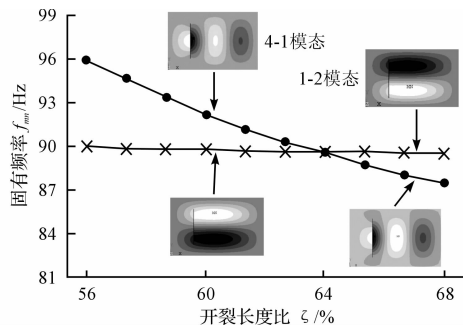


图 7 不对称开裂板的模态交叉图

态交叉区3,选取当 $56\% \leq \zeta \leq 68\%$ 时, f_{12} 变化不大,稳定在 90 Hz 左右,而 f_{41} 从 96 Hz 降低至 87 Hz,从而发生了模态交叉现象。

在上述两种算例中,薄板的 4-1 模态和 6-1 模态,由于开裂中心都在节线上或者附近,随着 ζ 增大,振型函数改变较大,容易产生模态交叉现象。

同时与 2.2 节算例相比表明,开裂位置不同时,随着 ζ 增大,都能产生类似的模态交叉。这表明模态交叉不是孤例,具有广泛的存在,尤其在高阶模态中,因此该研究结果对有通透开裂的板结构的检测和模态分析具有重要理论意义。

3 结束语

本研究通过对具有通透开裂矩形薄板的有限元仿真,计算和分析了不同开裂长度条件下,薄板固有频率的变化规律和模态交叉现象,得到以下结论:

(1)随着开裂长度的增大,由于板的刚度降低,矩形板的固有频率呈现降低趋势;另外,固有频率 f_{mn} 随开裂长度比的变化 ζ 呈‘z’字形规律。依据固有频率的变化规律,固有频率变化的幅度可分为 3 个级别:频变级、影响级和微影响级。处于频变级阶段中的模态,易发生模态交叉现象。

(2)通透开裂缝的长度和开裂中心位于模态节线上或者节线附近是产生模态交叉的重要因素。

(3)薄板的 4-1 模态和 6-1 模态,由于开裂中心都在模态节线上或者节线附近,随着 ζ 增大,产生了模态交叉现象。模态交叉现象的获取,可成为薄板开裂的检测和模态分析技术的重要理论依据。

参考文献(References):

- [1] TRENDAFILOVA. An investigation on vibration-based damage detection in an aircraft wing scaled model[J]. **Key Engineering Materials**, 2005(293):321-328.
- [2] 胡家顺,冯新. 裂纹梁振动分析和裂纹识别方法研究进展[J]. *振动与冲击*, 2007, 26(11):146-152.
- [3] RAMESH K, CHAUHAN D P S, MALLIK A K. Free vibration of an annular plate with periodic radial cracks [J]. **Journal of Sound and Vibration**, 1997, 206(2):266-274.
- [4] ISMAIL R, CARTMELL M P. An analysis of the effects of the orientation angle of a surface crack on the vibration of an isotropic plate [J]. **Journal of Physics: Conference Series**, 2012, 382(1), 37-42.
- [5] 徐芝纶. 弹性力学简明教程[M]. 北京:高等教育出版社, 2010.
- [6] 曹国雄. 弹性矩形薄板振动[M]. 北京:中国建筑工业出版社, 1983.
- [7] SHEN I Y, MOTE C D. On the mode splitting of degenerate mechanical systems containing cracks [J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1993, 60(4):926-935.
- [8] SHEN I Y. Vibration of elastic structures with cracks [J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1993, 60(2):414-421.
- [9] ISRAR A. Vibration analysis of cracked aluminium plates [D]. Glasgow: University of Glasgow, 2008.
- [10] 樊久铭,王玮瑾,芦田,等. 四边固支金属薄板裂纹检测的实验研究 [J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2011, 43(S1):75-78.
- [11] 郝晓克,陈恒,卢免采,等. 薄板结构开裂特征声-振响应的实验研究 [J]. *电声技术*, 2014, 38(7):61-65.

[编辑:李辉]

本文引用格式:

龚健,卢免采,陈振安,等. 矩形薄板通透开裂缝对固有频率和模态的影响分析[J]. *机电工程*, 2015, 32(8):1061-1065.

GONG Jian, LU Huan-cai, CHEN Zhen-an, et al. Analysis on natural frequency and mode of clamped rectangular thin plate with all-through crack [J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2015, 32(8):1061-1065.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>