

饱和离散时间系统非保守输出反馈控制器设计*

赵晓东,冯惠惠

(杭州电子科技大学 信息与控制研究所,浙江 杭州 310018)

摘要: 针对输入饱和离散系统由于采用输出反馈而导致的控制器设计存在很强保守性的问题,将凸多面体分析的方法应用于系统吸引域描述中,给出了基于状态的系统可控域的顶点描述和面描述形式,建立了系统输出反馈与基于状态的系统可控域之间的关系;为解决由于不稳定系统输出反馈第一步控制不施加任何控制作用而造成的系统状态可控域大大减小的保守性问题,提出了基于状态观测器的输出反馈非保守控制器设计方法;针对二阶不稳定系统,根据系统输出矩阵及输出初始值的不同情况,给出了输出反馈控制器第一步控制作用的具体形式,并证明了在该控制器作用下,系统的可控域达到最大,从而最大程度减小了控制器的保守性。最后通过 Matlab 进行了数值仿真实例研究。研究结果验证了所设计控制器的有效性。

关键词: 输入饱和离散系统; 输出反馈控制器; 二阶系统

中图分类号: TP13

文献标志码: A

文章编号: 1001-4551(2012)09-1111-05

Non-conservative output feedback controller for discrete systems with actuator saturation

ZHAO Xiao-dong, FENG Hui-hui

(Institute of Information and Control, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Aiming at solving the problems of conservative output feedback controller design for discrete systems with saturated input, convex polyhedra analysis method was applied to the system in the description of the attractive regions in terms of system states. Controllable region description form was given and the relationship between output feedback and controllable region was investigated. Due to the reason that none control action was applied to first step control of anti-stable system, the controllable region was greatly decreased and the conservatism of the system was caused. For second order anti-stable system, specific forms of the first step of the output feedback controller were proposed based on system output matrix and the initial values of output. Under this controller, the controllable region was maximized and the conservation was decreased in significant ways. Simulation examples were given using Matlab. The results indicate that the proposed method is valid.

Key words: input saturation discrete system; output feedback controller; second order systems

0 引言

饱和非线性是实际控制系统中的一种常见现象。执行器饱和往往会严重影响系统的各项性能,甚至导致系统不稳定,以至引起重大事故。饱和现象使问题变得复杂,而且饱和约束的存在极大地增加了计算的复杂性,因此开展饱和控制问题研究具有重要的理论意义。国内外许多学者对饱和约束做了大量的

研究工作,涌现出了各种处理方法。这些方法中具有代表性的有:低增益控制、抗饱和补偿器、最优约束控制^[1-6]等。大多数研究都采用状态反馈,但在实际的控制过程中,系统的状态是不易测量的,只有系统输出可以用来作为反馈信息,因此需要构造适当的状态观测器。

上述方法大都针对半稳定系统,对不稳定饱和输入系统,研究者在得到镇定控制器的同时,希望导出

收稿日期: 2012-03-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60974138,60804010);教育部留学回国基金资助项目([2010]1174)

作者简介: 赵晓东(1971-),男,山西太原人,教授,硕士生导师,主要从事鲁棒控制理论及应用、信息融合、最优控制等方面的研究。E-mail: xdzhao@hdu.edu.cn

一个保证闭环系统稳定的尽可能大的吸引域,使系统的吸引域尽可能的逼近可控域。众所周知,典型的输出反馈控制在系统零时刻不加任何的控制作用,得到系统可控域,这种方法具有保守性。研究者采用鲁棒控制理论时也只是利用部分输出信息设计控制器,这种做法也具有保守性。考虑不稳定离散系统,典型的输出反馈做法会使系统可控域减小。研究者利用系统输出的全部信息,在零时刻设计一个非保守控制器来扩大系统的可控域,减小对可控域估计的保守性。

本研究主要探讨饱和离散时间系统非保守输出反馈控制器设计。

1 问题描述与预备知识

考虑带有饱和约束的离散时间线性系统:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), y(k) = Cx(k) \quad (1)$$

式中: $x(k)$ —状态向量, $x(k) \in R^m$; $u(k)$ —控制输入向量, $u(k) \in R^m$; 并且 $\|u\|_{\infty} \leq 1, \forall k \geq 0$ 。

假定系统是可控的,满足上述约束的 u 被称为允许的。

定义 1: 称一个状态 x_0 是 K 步可控的,如果存在一个允许的控制,经过 K 使系统状态由 $x(0) = x_0$ 转移到 $x(K) = 0$ 。所有 K 步可控状态的集合称为 K 步可控域,表示为 $C_k(A, B)$ 。称一个状态 x_0 是可控的,如果有 $x_0 \in C_k(A, B), K \geq 0$ 。所有可控状态的集合称为可控域,表示为 $C(A, B)$ 。

计算系统可控域的通用方法是 Fourier-Moltzkin 投影法,然而在计算过程中会产生大量冗余的线性约束,需要不断用线性规划的方法予以消除。当系统的维数较高或者步数较多时,由该方法所引起的冗余约束的消除将带来巨大的计算量。Jamak^[7]结合凸多面体的相关知识,给出了系统零可控域的面表示方法。Zhao^[8-9]在 Jamak 的基础上,给出了零可控域的顶点和面表示方法,并给出了相关的算法。

假定系统初始状态 $x(0) = x_0$, 系统的 K 步可控域为:

$$C_{1k}(A, B) = \left\{ -\sum_{i=0}^{K-1} A^{i-1} Bu(i) \right\} - [A^{-1}Bu(0) + A^{-2}Bu(1) + \dots + A^{-K}Bu(K-1)] \quad (2)$$

假设 (A, B) 既是可测的又是可控的,利用输出反馈的典型方法设计控制器,即系统在 $k=0$ 时刻不加任何控制作用,即 $u(0)=0$, 此时相当于初始状态 $x_0 = Ax(0)$, 系统的 K 步可控域为:

$$C_{2k}(A, B) = \left\{ -\sum_{i=0}^{K-1} A^{i-2} Bu(i) \right\} - [A^{-2}Bu(0) + A^{-3}Bu(1) + \dots + A^{-K-1}Bu(K-1)] \quad (3)$$

由式(3, 4)可以得到 $C_{2k}(A, B) = A^{-1}C_{1k}(A, B)$, A 的所有特征值都在单位圆外,系统的可控域会减小。

2 主要结果

考虑二阶不稳定的输入饱和离散系统,为了使系统的可控域尽可能大,本研究给出基于状态观测器的输出反馈控制新做法,即在 $k=0$ 时刻对系统施加控制作用。考虑如下形式的二阶系统,经过相似变换, $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ 、 $B = \text{diag}(b_{11}, b_{12})$, 其中 $\lambda_1 \geq 1, \lambda_2 \geq 1$ 。为了便于分析,不妨假设 $B = I$, 并且 $\lambda_1 \leq \lambda_2, c_1 > 0, c_2 > 0$, 则:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(k), y(k) = [c_1 \ c_2] x(k) \quad (4)$$

二阶系统的可控域如图 1 所示。外部矩形所包含的区域是系统式(4)正常的可控域,内部矩形所包含的区域是采用典型输出反馈时系统能够达到的最大的可控域。假定直线 $y(0) = c_1x_1 + c_2x_2$ 的斜率为 k , 通过 A, B 直线的斜率 k_1 , 通过 B, F 直线斜率为 k_2 , 通过 A, E 直线的斜率为 k_3 , 通过 B, C 直线的斜率为 k_4 , 通过 A, D 直线的斜率为 k_5 。其中 A, B, C, D, E, F 的坐标分别为: $(1/(\lambda_1 - 1), 0)$ 、 $(0, 1/(\lambda_2 - 1))$ 、 $(1/\lambda_1(\lambda_1 - 1), 1/\lambda_2(1 - \lambda_2))$ 、 $(1/\lambda_1(1 - \lambda_1), 1/\lambda_2(\lambda_2 - 1))$ 、 $(1/\lambda_1(1 - \lambda_1), 1/(\lambda_2 - 1))$ 、 $(1/(\lambda_1 - 1), 1/\lambda_2(1 - \lambda_2))$ 。

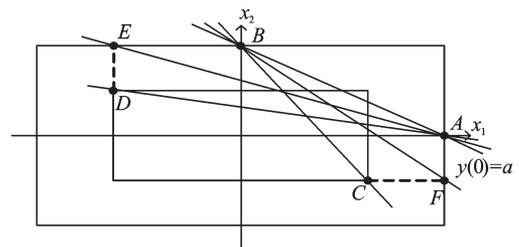


图 1 二阶系统的可控域

因此有:

$$k_1 = -(\lambda_1 - 1)/(\lambda_2 - 1), k_2 = -(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 + 1)/\lambda_2(\lambda_2 - 1), k_3 = -\lambda_1(\lambda_1 - 1)/(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 - 1), k_4 = -\lambda_1(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 + 1)/\lambda_2(\lambda_2 - 1), k_5 = -\lambda_1(\lambda_1 - 1)/\lambda_2(\lambda_2 - 1)(\lambda_1 + 1)。$$

并且:

$$k_4 < k_2 < k_1 < k_3 < k_5。$$

根据 k 的取值,可以分为 6 种情况:

- (1) $k < k_4$; (2) $k_4 \leq k < k_2$; (3) $k_2 \leq k < k_1$; (4) $k_1 \leq k < k_3$;
- (5) $k_3 \leq k < k_5$; (6) $k \geq k_5$ 。

以上 6 种情况下的状态图分别如图 2~7 所示。

当 $y(0) = c_1x_1 + c_2x_2$ 通过 A, B, C, D 时,假设 $y(0)$ 分别等于 s, t, p, q 。对情况(1~3), 有 $s = c_1/(\lambda_1 - 1)$, $t = c_2/(\lambda_2 - 1)$, $p = -c_2/(\lambda_2 - 1)$, $q = -c_1/(\lambda_1 - 1)$; 对情况(4~6), 有 $s = c_2/(\lambda_2 - 1)$, $t = c_1/(\lambda_1 - 1)$, $p = -c_1/(\lambda_1 - 1)$, $q = c_2/(\lambda_2 - 1)$ 。正常的可控区域被直线 $y(0) = s, t, p, q$ 分

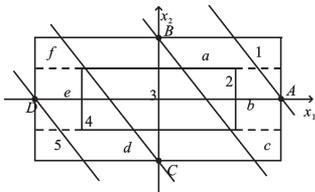


图2 情况(1)下的系统状态图

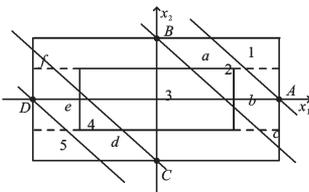


图3 情况(2)下的系统状态图

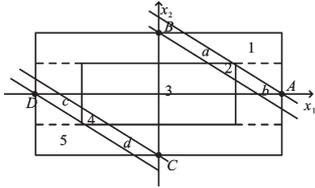


图4 情况(3)下的系统状态图

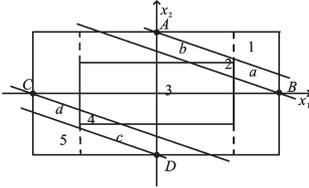


图5 情况(4)下的系统状态图

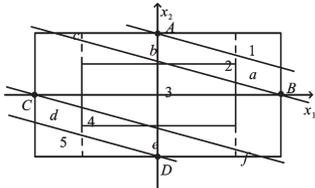


图6 情况(5)下的系统状态图

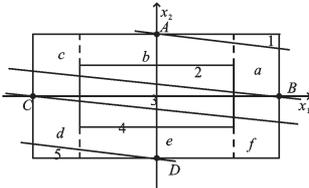


图7 情况(6)下的系统状态图

成1、2、3、4、5五部分,各部分状态如表1所示。本研究根据各部分的状态给出控制器的具体形式。

表1 6种情况下,系统状态分析表

(1),(2),(3)情况下系统状态		(4),(5),(6)情况下系统状态	
$x_1 > 0, x_2 > 0$	$y(0) \geq s$	$x_2 > 0, x_1 > 0,$	$y(0) \geq s$
$x_1 > 0, x_2$ 未知	$t \leq y(0) < s$	$x_2 > 0, x_1$ 未知	$t \leq y(0) < s$
x_1, x_2 未知	$p \leq y(0) < t$	x_2, x_1 未知	$p \leq y(0) < t$
$x_1 > 0, x_2$ 未知	$q \leq y(0) < p$	$x_2 < 0, x_1$ 未知	$q \leq y(0) < p$
$x_1 < 0, x_2 < 0$	$y(0) < q$	$x_2 < 0, x_1 < 0,$	$y(0) < q$

定理1^[10]考虑如图2~7所示的6种情况,给出基于观测器的非保守输出反馈控制器的设计方法。即根据零时刻的输出,给出零时刻控制器的具体形式,并且给出系统新的可控部分和不可控部分,相关分析如表2所示。系统新的可控域如图8~13所示。

表2 $k=0$ 时刻的控制器形式及系统可控情况分析

6种情况	系统 $k=0$ 时刻的控制器	系统可控部分	系统不可控部分
(1)	$u(0) = f(y) = \begin{cases} [-1 \ -1]^T, & y(0) \geq s, \\ [-1 \ 0]^T, & t \leq y(0) < s, \\ [0 \ 0]^T, & p \leq y(0) < t, \\ [1 \ 0]^T, & q \leq y(0) < p, \\ [1 \ 1]^T, & y(0) < q. \end{cases}$	1,3,5,b,e	a,c,d,f
(2)		1,3,5,b,e	a,c,d,f
(3)		1,3,5,b,c	a,d
(4)		1,3,5,b,c	a,d
(5)		1,3,5,b,e	a,c,d,f
(6)		1,3,5,b,e	a,c,d,f

证明:通过极限条件可知,对所有的 $x(0)$,只要 $x_i(1)$ 满足 $x_i(1) \leq (\lambda_i - 1)$,则状态是可控的。以对第(3)

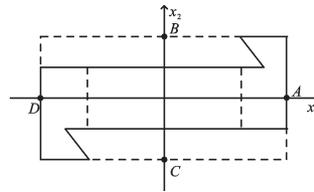


图8 施加控制作用后情况(1)的系统状态图

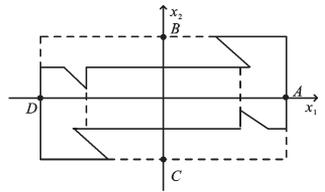


图9 施加控制作用后情况(2)的系统状态图

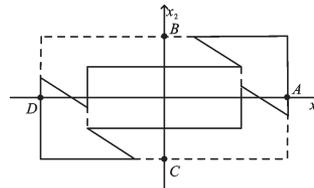


图10 施加控制作用后情况(3)的系统状态图

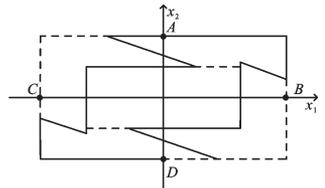


图11 施加控制作用后情况(4)的系统状态图

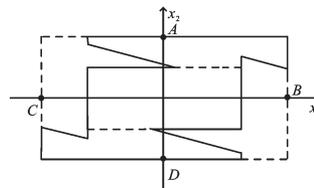


图12 施加控制作用后情况(5)的系统状态图

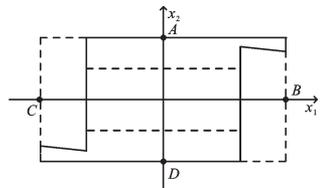


图13 施加控制作用后情况(6)的系统状态图

种情况的证明为例:首先证明1部分是可控的,1部分中 $x_i(0)_{\max} = 1/(\lambda_i - 1)$,应用 $u(0) = [-1 \ -1]^T$,有 $x(1) = \lambda_i x(0) - 1$,因为 $x_1 > 0, x_2 > 0, \lambda_i \geq 1$,则有 $x_i(1)_{\max} = 1/(\lambda_i - 1)$,满足极限条件,因此,1部分是可控的。同理,5部分也是可控的。对于b部分, $x_1(0)_{\max} = 1/(\lambda_1 - 1)$, $x_2(0)_{\max} = 1/(\lambda_2 - 1)$,应用 $u(0) = [-1 \ 0]^T$,有 $x_1(1)_{\max} = 1/(\lambda_1 - 1)$, $x_2(1)_{\max} = 1/(\lambda_2 - 1)$,满足极限条件,因此b部分是可控的。同理,c部分是可控的。假设a部分是可控的,当 $x_2(0) = 1/(\lambda_2 - 1)$ 在边界上时, $u(0) = [-1 \ 0]^T$,此时 $x_2(1) = \lambda_2/(\lambda_2 - 1) > 1/(\lambda_2 - 1)$,不满足极限条件,因此a部分是不可控的。同理,d部分也是不可控的。对于第(1~6)种情况,可以用相同方法进行证明。

由文献[9]可知,给定可控域内的任意状态 $x_0 \in C_k(A, B)$,可知存在 $0 \leq \rho \leq 1$ 可以把可控域内的状态 x_0 投影到可控域的一个面 Λ 上,而可控域面 Λ 上的点都可以用可控域面上的顶点 x_1, x_2, \dots, x_n 表示,即:

$$\rho^{-1} x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad (5)$$

而由可控域的顶点描述过程可知,肯定存在一个允许的控制序列 u ,使系统经过有限步转移到达系统原点或者到达 $O_{\rho, \delta}$ 邻域内,这种算法为投影算法。

在新的输出反馈方法作用下,本研究由系统 $y(0)$ 、 $y(1)$ 时刻的输出反解出系统的状态,采用投影算法设计投影控制器。

本研究以具有如下形式的二阶离散系统

$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $B = I$ 为例,给出了控制器的具体形式,并且证明了其正确性。对如下形式的系统 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $B = \text{diag}(b_{11}, b_{22})$ 有相同的结果。

3 仿真实例

本节给出应用上述控制器的一个仿真实例。考虑具有如下形式的不稳定的二阶系统:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = [1 \ 1]x(k) \quad (6)$$

其中, A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 的坐标分别为: $(2,0)$ 、 $(0,1)$ 、 $(4/3, -1/2)$ 、 $(-4/3, 1/2)$ 、 $(-4/3, 1)$ 、 $(2, -1/2)$, 因此有 $k_1 = -1/2$ 、 $k_2 = -3/4$ 、 $k_3 = -3/10$ 、 $k_4 = -9/8$ 、 $k_5 = -3/20$ 。

上述系统 $k = -1$, 属于第(2)种情况, 在这种情况下有 $s = 2$ 、 $t = 1$ 、 $p = -1$ 、 $q = -2$, 第一步控制器的具体形式为:

$$u(0) = f(y) = \begin{cases} [-1 \ -1]^T, & y(0) \geq 2 \\ [-1 \ 0]^T, & 1 \leq y(0) < 2 \\ [0 \ 0]^T, & -1 \leq y(0) < 1 \\ [1 \ 0]^T, & -2 \leq y(0) < -1 \\ [1 \ 1]^T, & y(0) < -2 \end{cases}$$

(1) $y(0) = 2.2$ 时系统(6)的仿真结果如图 14 所示。外部的矩形所包含的区域是正常情况下系统的可控域, 内部矩形所包含区域是在传统的输出反馈作用下系统的可控域, 而实线所围成的区域是在第一步运用上述控制器后系统的可控域。当 $y(0) = 2.2$ 时, 给定状态 $x_1(0) = [2.0 \ 0.2]^T$, $x_2(0) = [1.8 \ 0.4]^T$, $x^2(0) = [1.4 \ 0.8]^T$, 分别用“o, +, *”表示。第一步施加控制作用 $u(0) = [-1 \ -1]^T$, 经过一步作用之后, 可以得到系统下一时刻的状态 $x_1(1) = [2.0 \ -0.6]^T$, $x_2(1) = [1.7 \ -0.2]^T$, $x_3(1) = [1.1 \ 0.6]^T$ 。可以看到状态: $x_1(0) = [2.0 \ 0.2]^T$, $x_2(0) = [1.8 \ 0.4]^T$, $x_3(0) = [1.4 \ 0.8]^T$ 都是可控的。

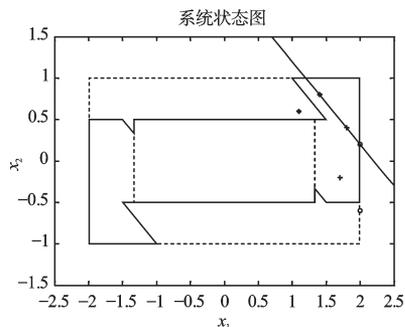


图 14 $y(0) = 2.2$ 时系统(6)的仿真结果

(2) $y(0) = 1.4$ 时系统(6)的仿真结果如图 15 所示。外部的矩形所包含的区域是正常情况下系统的可控域, 内部矩形所包含区域是在传统的输出反馈作用下系统的可控域, 而实线所围成的区域是在第一步运用上述控制器后系统的可控域。当 $y(0) = 1.4$ 时, 给定

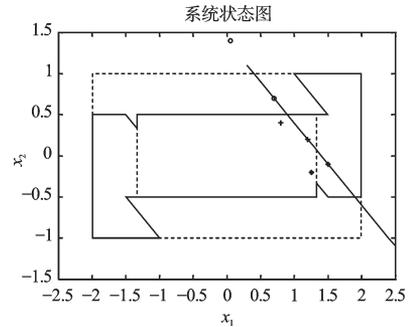


图 15 $y(0) = 1.4$ 时系统(6)的仿真结果

状态 $x_1(0) = [0.7 \ 0.7]^T$, $x_2(0) = [1.2 \ 0.2]^T$, $x_3(0) = [1.5 \ -0.1]^T$, 分别用“o, +, *”表示。第一步施加控制作用 $u(0) = [-1 \ 0]^T$, 经过一步作用之后, 可以得到系统下一时刻的状态 $x_1(1) = [0.05 \ 1.4]^T$, $x_2(1) = [0.8 \ 0.4]^T$, $x_3(1) = [1.25 \ -0.2]^T$ 。可以看到状态: $x_2(0) = [1.2 \ 0.2]^T$, $x_3(0) = [1.5 \ -0.1]^T$ 是可控的, $x_1(0) = [0.7 \ 0.7]^T$ 是不可控的。

(3) $y(0) = 1.6$ 时系统(6)的仿真结果如图 16 所示。外部的矩形所包含的区域是正常情况下系统的可控域, 内部矩形所包含区域是在传统的输出反馈作用下系统的可控域, 而实线所围成的区域是在第一步运用上述控制器后系统的可控域。当 $y(0) = -1.6$ 时, 给定状态 $x_1(0) = [-1.5 \ -0.1]^T$, $x_2(0) = [-0.9 \ -0.7]^T$, $x_3(0) = [-1.8 \ 0.2]^T$, 分别用“o, +, *”表示。第一步施加控制作用 $u(0) = [1 \ 0]^T$, 经过一步作用之后, 可以得到系统下一时刻的状态 $x_1(1) = [-1.25 \ -0.2]^T$, $x_2(1) = [-0.35 \ -1.4]^T$, $x_3(1) = [-1.7 \ 0.4]^T$ 。可以看到状态 $x_1(0) = [-1.5 \ -0.1]^T$, $x_3(0) = [-1.8 \ 0.2]^T$ 是可控的, $x_2(0) = [-0.9 \ -0.7]^T$ 是不可控的。

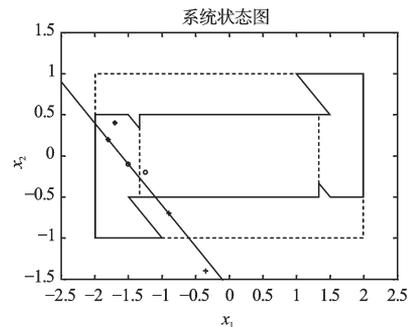


图 16 $y(0) = 1.6$ 时系统(6)的仿真结果

(4) $y(0) = -2.1$ 时系统(6)的仿真结果如图 17 所示。外部的矩形所包含的区域是正常情况下系统的可控域, 内部矩形所包含区域是在传统的输出反馈作用下系统的可控域, 而实线所围成的区域是在第一步运用上述控制器后系统的可控域。当 $y(0) = -2.1$ 时, 给定状态 $x_1(0) = [-1.2 \ -0.9]^T$, $x_2(0) = [-1.7 \ -0.4]^T$, $x_3(0) = [-2 \ -0.1]^T$, 分别用“o, +, *”表示。第一步施加控制作用 $u(0) = [1 \ 1]^T$, 经过一步作用之后, 可以得到系统下一时刻的状态 $x_1(1) = [-0.8 \ -0.8]^T$,

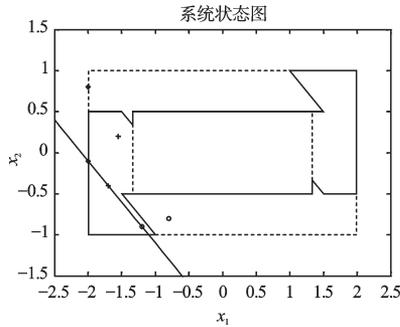
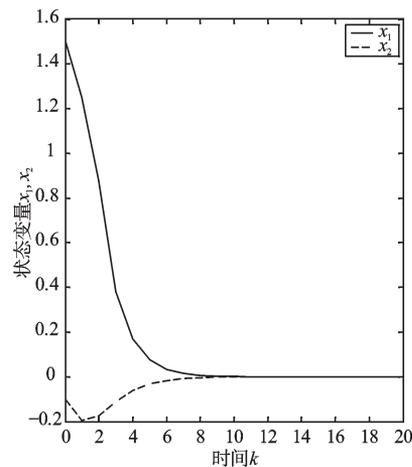


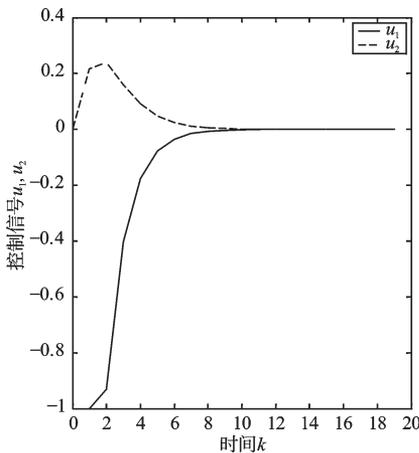
图17 $y(0)=-2.1$ 时系统(6)的仿真结果

$x_2(1)=[-1.55 \ -0.2]^T$, $x_3(1)=[-2 \ 0.8]^T$ 。可以看到状态:
 $x_1(0)=[-1.2 \ -0.9]^T$, $x_2(0)=[-1.7 \ -0.4]^T$, $x_3(0)=[-2 \ -0.1]^T$ 都是可控的。

对式(6)所示的系统,本研究假定系统 $k=0$ 时刻的输出 $y(0)=1.4$, $k=0$ 时刻施加的控制作用为 $u(0)=[-1 \ 0]^T$, $k=1$ 时刻的输出 $y(1)=1.05$ 。由系统的输出 $y(0)$, $y(1)$ 可以反求出系统初始状态 $x(0)=[1.5 \ -0.1]^T$ 。本研究应用投影算法设计状态反馈控制器,系统的状态轨迹和系统的控制信号如图18所示。



(a) 系统状态轨迹



(b) 控制信号轨迹

图18 系统的状态轨迹和控制信号轨迹

4 结束语

针对输入饱和离散系统输出反馈控制器保守设计的问题,由于不稳定系统第一步控制不施加任何控制作用而造成的系统可控域大大减小。本研究提出了基于状态观测器的输出反馈非保守控制设计方法,将凸多面体分析的方法应用到系统吸引域描述中,给出了系统可控域的多面体描述形式,建立了输出反馈与可控域之间的关系。对二阶不稳定系统,本研究根据系统输出矩阵及输出初始值的不同情况,给出控制器第一步控制器的具体形式,使系统的可控域达到最大。本研究在证明其正确性的同时,还举例证明了这种控制器的有效性。

参考文献(References):

- [1] ZHOU B, DUAN G R, LIN Z L. A parametric lyapunov equation approach to the design of low gain feedback [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2008, 53(6): 1548-1554.
- [2] FLORES J V, GOMES J M, PEREIRA L F A, et al. Repetitive control design for mimo systems with saturating actuators [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2012, 57(1): 192-198.
- [3] RAWLINGS J B, MUSKE K R. The stability of constrained receding horizon control [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1993, 38(10): 1512-1516.
- [4] 盛 亮. 基于饱和方法的非线性系统镇定设计[D]. 长沙: 中南大学信息科学与工程学院, 2011.
- [5] WU F, LIN Z L, ZHENG Q. Output feedback stabilization of linear systems with actuator saturation [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2007, 52(1): 122-128.
- [6] HU T S, MILLER D E, QIU L. Null controllable region of LTI discrete-time systems with input saturation [J]. **Automatica**, 2002, 38(11): 2009-2013.
- [7] JAMAK A. Stabilization of Discrete-time Systems with Bounded Control Inputs [D]. Ms Thesis, University of Waterloo, 2000.
- [8] ZHAO X D, XUE A K, CHAI L, et al. Linear systems with input constraints: stability and optimality [C]//Proceedings of the 2005 American Control Conference, 2005: 1413-141.
- [9] ZHAO X, XUE A. Null-controllable region of linear systems with input amplitude and rate constraints [C]//Proceedings of the 2005 IEEE Conference on Control Applications, 2005: 406-409.
- [10] ZHOU H B, FENG H H, ZHAO X D. An output feedback approach to enlarging the controllable region for systems subject to actuator saturation [J]. **Applied Mechanics and Materials**, 2011, 71-78(1): 4256-4260.

[编辑:李 辉]