

基于十字链叉的NURBS曲面插补算法及仿真分析

徐志洋, 张 平*

(广东工业大学 机电工程学院, 广东 广州 510006)

摘要: 针对目前曲面插补算法存在的实时性不强,插补算法需要大量的额外空间,算法步骤繁琐以及对插补过程产生的大量数据点的数据处理问题,为了保证作为数控技术核心模块的曲面插补算法的高速、高精度性能,基于德布尔递归算法思想,重新推导出了适合于曲面插补的新的NURBS曲面表达式,在此基础上重新设计了曲面插补快速算法,并着重研究了新算法的实时性。另外,为验证新算法的正确性和有效性,提出并实现了十字链叉数据表达结构,对NURBS曲面插补点微小步长及插补质量进行了分析。建立了以VC6.0/MFC为平台的、集弓高误差、速度、加速度等功能分析于一体的算法仿真验证系统,并以汽轮机叶片为例进行了验证。研究表明,该算法可以满足曲面插补高速、高精度的性能要求。

关键词: 德布尔递归算法; 非均匀有理B样条; 十字链叉; 曲面插补算法

中图分类号: TH16; TP3

文献标志码: A

文章编号: 1001-4551(2012)09-1023-05

Simulation and analysis of algorithm for NURBS surface based on crossed orthogonal list

XV Zhi-yang, ZHANG Ping

(School of Electromechanical Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract: Aiming at the lacks of present surface interpolation algorithms, poor real-time property, more amount of extra memory, complex algorithm processes and data processing during the interpolation, and ensuring the high speed and high accuracy properties of surface interpolation algorithm which is the core function module of NC system, a new equation for NURBS that is adapted for surface interpolation was derived newly based on de-Boor recursive algorithm, then a fast interpolation algorithm for surface was developed newly, and the real-time property of the new algorithm was studied in particularly. Moreover, in order to verify the algorithm, a new data structure called crossed orthogonal list was proposed and programmed to analyze the performance of the NURBS interpolation points by the new algorithm. The analysis functions of chord error, velocity and acceleration were integrated in a simulation system based on VC6.0/MFC. Then, a turbine blade was taken for instance. The results indicate that the algorithm owns the high speed and high accuracy performance.

Key words: de-Boor recursive algorithm; non-uniform rational b-spline (NURBS); crossed orthogonal list; surface interpolation algorithms

0 引言

随着制造业的发展,各种曲线曲面的出现,使得对自由曲面的加工技术成为制造中的关键技术,而且,人们审美观越来越高,因此,对曲面加工精度等的要求越来越高,高速、高精度的曲面直接插补算法的研究迫在眉睫。非均匀有理B样条(NURBS)作为描述自由型曲线曲面的标准,被广泛应用于计算机辅助

设计/计算机辅助制造系统中。因此,针对NURBS曲面插补算法的研究具有非常重要的意义。

随着曲面直接插补技术的发展,以及NURBS理论体系的成熟和完善,NURBS曲面插补技术将会成为插补技术主流,然而,目前的插补算法尚存在以下缺陷^[1-4]:

(1) NURBS曲面上点的求解算法方面。在描述NURBS曲面数学模型方面,许多研究者都采用矩阵形式,这种形式需要推导出参数方向的几何系数矩阵,

收稿日期: 2012-04-09

作者简介: 徐志洋(1987-),男,河南濮阳人,主要从事数控技术方面的研究。E-mail: sunboy1423@163.com

通信联系人: 张 平,男,教授,博士,硕士生导师。E-mail: pzhang@gdut.edu.cn

那么对于不同阶数的曲面,就要推导不同阶数所对应的几何系数矩阵,推导过程非常繁琐,而且需要事先推导后才能应用于求解NURBS曲面上的点,这种方式在算法的实时性方面有很大不足。

(2) 曲面上插补点的处理方面。插补过程将会产生大量的数据点,为了保证插补质量,提高插补精度,需要对插补点进行验证,换言之,需要对插补点进行修正,而修正的依据就是当前插补点跟临近区域插补点的几何关系,这就需要一种数据结构将插补点之间的关系表示出来。

本研究针对以上不足,首先推导出通用性很强的求解NURBS曲面上点的算法,该算法可避免繁琐地求取NURBS曲面参数方向的几何系数矩阵过程。为了验证NURBS曲面插补算法的正确性,保证插补质量,本研究设计新的数据结构,即十字链叉。

1 NURBS曲面新插补算法的推导

曲面的高速、高精度加工要求插补点密、插补周期短,因此,算法的高速性和实时性方面是插补技术的关键,以往的算法需要预先求出几何系数矩阵,显然不能满足实时性要求,本研究将推导出基于德布尔递推算法的求取NURBS曲面上点的公式。

1.1 求解NURBS曲面上点的算法思想

NURBS曲面 $P(u,v)$ 的数学模型^[5]为:

$$P(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} d_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)} \quad (1)$$

式中: d_{ij} , w_{ij} —曲面的控制顶点及其对应的权因子; $N_{i,k}(u)$, $N_{j,l}(v)$ — u, v 方向的B样条基函数。

本研究采取的插补思想是将NURBS曲面分割成一条条NURBS曲线,运用NURBS曲线的插补算法,那么NURBS的数学模型可以改写为:

$$P(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^m (\sum_{j=0}^n w_{ij} d_{ij} N_{j,l}(v)) N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^m (\sum_{j=0}^n w_{ij} N_{j,l}(v)) N_{i,k}(u)} \quad (2)$$

其中,令:

$$D_i = \sum_{j=0}^n w_{ij} d_{ij} N_{j,l}(v);$$

$$W_i = \sum_{j=0}^n w_{ij} N_{j,l}(v)。$$

本研究依据计算速度较快的NURBS曲线的德布尔递推算法^[6],推导出高速、高精度的求解NURBS曲面上点的算法表达式。

首先,利用B样条曲线的德布尔递推算法,求出公式(2)里括号中的表达式,一个参数 i 对应一个值,一共会产生 $m+1$ 个 W_i 和 D_i ,将 W_i 和 D_i 作为新的控制顶点,代入公式(1)可得:

$$P(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^m D_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^m W_i N_{i,k}(u)} \quad (3)$$

公式(3)是两个B样条曲线的数学模型相除的形式,然后分别利用德布尔递推算法进行求解,将其结果相除,即可求得NURBS曲面上点的坐标。

1.2 求解NURBS曲面上点的德布尔算法

已知如公式(1)所给出的NURBS曲面的数学模型,节点矢量 U 和 V ,控制顶点 d_{ij} 及其对应的权因子 w_{ij} 均为已知。针对NURBS曲面上点的求解进行如下公式推导。

给定 u 向和 v 向参数 $u \in [u_i, u_{i+1}] \subset [u_k, u_{m+1}]$ 、 $v \in [v_j, v_{j+1}] \subset [v_l, v_{n+1}]$, 则求NURBS曲面上对应点 $P(u,v)$ 的德布尔算法如下:

$$D_{r,s}^t = \begin{cases} w_{rs} \times d_{rs} / W_{r-k,s}^k & t=0 \\ (1-\alpha_{r,s}^t) D_{r,s}^{t-1} + \alpha_{r,s}^t D_{r+1,s}^{t-1} & \begin{cases} t=1, \dots, k \\ r=i-k+t, \dots, i \\ s=0, 1, \dots, n \end{cases} \end{cases}$$

$$W_{r,s}^t = \begin{cases} W_{r,s} & t=0 \\ (1-\alpha_{r,s}^t) W_{r,s}^{t-1} + \alpha_{r,s}^t W_{r+1,s}^{t-1} & \begin{cases} t=1, \dots, k \\ r=i-k+t, \dots, i \\ s=0, 1, \dots, n \end{cases} \end{cases}$$

$$\alpha_{r,s}^t = \frac{u - u_{r+t}}{u_{r+k+1} - u_{r+t}} \begin{cases} t=0, 1, \dots, k \\ r=i-k+t, \dots, i \\ s=0, 1, \dots, n \end{cases}$$

$$W_{r,s} = w_{r,s-l}^l \begin{cases} r=i-k+t, \dots, i \\ s=0, 1, \dots, n \end{cases};$$

$$w_{r,s}^t = \begin{cases} w_{rs} & t=0 \\ (1-\beta_{r,s}^t) w_{r,s}^{t-1} + \beta_{r,s}^t w_{r,s+1}^{t-1} & \begin{cases} t=1, \dots, k \\ r=i-k+t, \dots, i \\ s=0, 1, \dots, n \end{cases} \end{cases}$$

$$\beta_{r,s}^t = \frac{v - v_{s+t}}{v_{s+l+1} - v_{s+t}} \begin{cases} t=0, 1, \dots, k \\ r=i-k+t, \dots, i \\ s=0, 1, \dots, n \end{cases}。$$

则:

$$P(u,v) = D_{i-k,j}^k \quad (4)$$

至此,NURBS曲面上点的求解算法推导完毕,接下来笔者对该算法进行讨论分析。

1.3 算法讨论

目前使用较多的求解算法为NURBS曲面的矩阵表示形式^[7]:

$$P(u,v) = \frac{UM_u D_{ij} M_v^T V^T}{UM_u W_{ij} M_v^T V^T}$$

参数次数不同,则对应不同的几何系数矩阵,例如: u 方向为3次, v 方向为2次的时候,对应的几何系数矩阵分别为:

$$M_u = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}; \quad M_v = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}。$$

从该几何矩阵系数可以看出,3次和2次的矩阵系数完全不同,而且,矩阵中各个元素采用的为前向差分,各个元素求解过程很复杂,这种形式存在下列不足:

(1) 求取几何系数矩阵元素比较繁琐,过程很复杂;

(2) 对于 3×2 次曲面,矩阵相乘,需要做乘法计算次数为 $(16+12+9) \times 2 + 18 + 21 = 113$ 次;曲面次数越高,做乘法计算的次数越多。

(3) 表示形式非常复杂。

基于德布尔递推算法的推导公式具有以下优势:

(1) 形式非常简洁;

(2) 3×2 次曲面仅需要做乘法计算次数为 $18+8+(6+3) \times 4 + 18 + 8 + 2 + 2 + 2 = 94$ 次。



图1 算法消耗时间对比

为了直观显示该算法的时间优越性,在PC机(CPU主频为2.53 GHz)上,本研究分别计算出利用矩阵形式和德布尔算法求解曲面上一点的所消耗的时间,其数据对比如图1所示。从图1中可以看出,利用德布尔算法仅需要消耗 $28 \mu s$,而利用矩阵形式的算法则需要 $32 \mu s$ 。在求取曲面大量插补点时则会节约更多时间,满足实时性要求。同时,该算法形式简单,乘法计算次数很少,而且不同次数的曲面求解只需要给出相应的节点矢量、控制顶点、权因子,就可以直接

求取NURBS曲面上的点的坐标,不需要过程中繁琐的过程参数的求解(例如,几何系数矩阵)。所以,该算法符合高速、实时性的目标要求。

在满足算法的实时性以后,高速、高精度的目标已经实现一半,精度目标的实现需要对插补点进行密化,然后对插补精度进行验证,在面对大量的插补点验证工作中,要求研究者能对大量数据点进行操作,下面本研究针对这一要求提出了一种新的数据结构。

2 十字链叉的提出与运用

一张曲面包含了大量的点坐标数据,为了在仿真中能对插补点进行修正以达到高精度的目标,研究者需要存储曲面插补点,对插补算法的精度、速度、加速度等参数进行验证。面对大量数据点,本研究提出采用链表的数据结构,同时基于插补点之间的几何关系,设计了一种新数据结构—十字链叉。十字链叉作为链表的一种,具有以下方面的优点^[8]:

(1) 十字链叉是一种非固定长度的数据结构,以动态方式申请,不仅占用资源少,而且设计简单,该数据结构对应的存储空间是离散的,根据需要申请足够的空间,可以将不连续的内存充分利用,不会造成内存浪费。

(2) 对十字链叉的操作(如插入、修改、删除等)只需要修改相应的指针就可以完成,该指针后面的元素不会产生多余的移动等过程,可以提高效率。

(3) 十字链叉的指针域包含了4个指针,将前、后、左、右4个方向的结点都联系起来。

因此,本研究在曲面插补的过程中考虑到角度、法向矢量等因素,通过运用十字链叉可以方便地查询任意一插补点4个方向的临近插补点,以便于进行编辑修改,效率很高。

十字链叉的每一个结点都有4个指针域,一个指向方向向下的结点,一个指向方向向右的结点,一个指向方向向上的结点,还有一个指向方向向左的结点,该数据结构的定义为:

```
typedef struct Lnode
{
    double x;//x 坐标
    double y;//y 坐标
    double z;//z 坐标
    double A;//A 转动轴坐标
    double C;//C 转动轴坐标
    double u,v;//uv 方向参数
    struct Lnode *right,*down,*up,*left;
}*TLnode,*LinkList;
```


为了方便表达,本研究同时设置头结点的链表,定义为下面的结构体:

```
typedef struct Hnode
{
    TLnode uHead;
    TLnode vHead;
    double uH,vH;
    struct Hnode *next,*prev;
};
```

该数据结构可以通过4个方向的指针将结点跟其邻域内结点联系起来,根据它们之间的几何关系,笔者对插补点进行编辑处理;同时,本研究在链表里面设置了头结点,根据 u 向、 v 向的数值,可以很方便、很快速地在十字链叉结构中搜索插补点,如图2所示,图中每一个节点中的深色部分为数据域。基于十字链叉在开辟一条链表空间进行存储修改等操作的高效性,插补算法^[9]的高速、实时性得以保证的同时,也实现了高精度的目标。

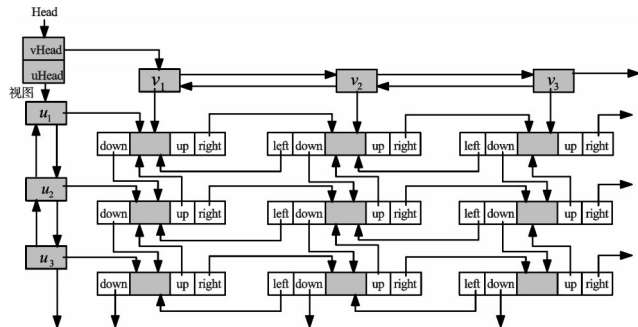


图2 NURBS曲面的十字链叉数据结构表达

3 算法仿真分析

汽轮机叶片制造是汽轮机制造技术中的关键技术,它的制造精度的好坏直接影响汽轮机的工作效率和工作寿命,为了提高汽轮机叶片的精度,加工方法不断更新^[10],本研究以汽轮机叶片的加工为例进行算法验证。

笔者运用VC++/MFC编程^[11],建立验证界面;通过编程实现本研究第1部分推导出的求解NURBS曲面上点的算法,然后运用十字链叉对插补点数据进行存储,将整张曲面的插补点连接成一张“网”,以便于在验证阶段,依据与其临近区域插补点的几何位置关系,对当前插补点进行精度等数据的验证。本研究以曲面中几条插补曲线为例进行测试模拟,显示效果如图3所示。

图3中的网格线为模拟叶片,图中的蓝色(粗)线条为插补模拟线条。蓝色(粗)线条完全符合整张曲面的走势,没有无限远等坏点出现,可见,该NURBS曲面插补算法非常正确。

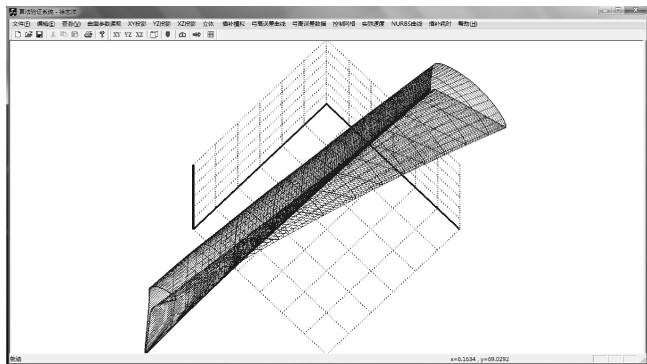
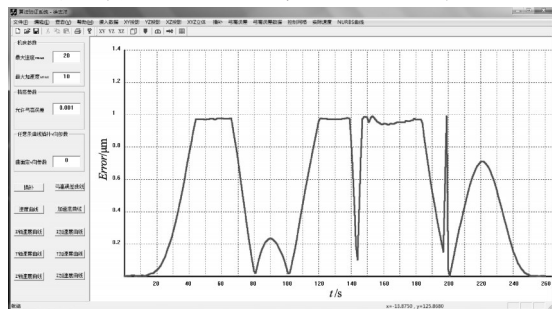


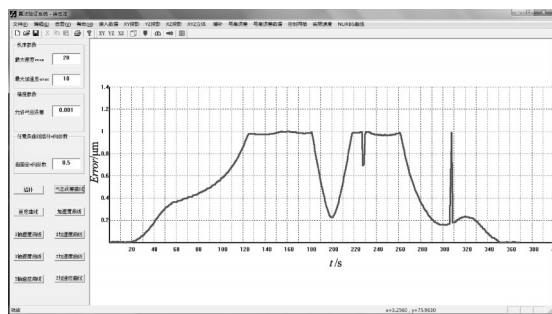
图3 实例曲面插补仿真

本研究以弓高误差随插补时间的变化曲线图进行测试,在MFC的平台上,编程设计出弓高误差随插补时间的关系图,直观地反映其中一条插补曲线的精度,具体步骤是:固定 v 向参数值,得到一条关于 u 的NURBS曲线,通过分析该曲线在插补过程中所产生的弓高误差来反映精度问题。

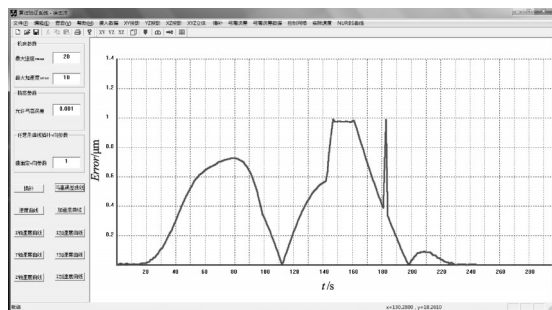
仿真系统界面如图4所示,研究者在该系统中直接输入机床参数、最大允许弓高误差,以及 v 向参数值,然后点击各个功能按钮,可以显示区域显示相应功



(a) $v=0$ 时的插补曲线弓高误差曲线



(b) $v=0.5$ 时的插补曲线弓高误差曲线



(c) $v=1$ 时的插补曲线弓高误差曲线

图4 进给速度为20 m/min下的弓高误差曲线

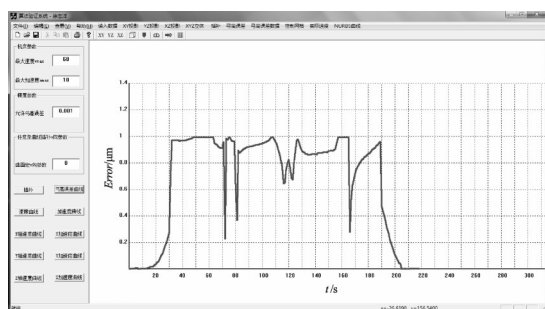
能的数据仿真图,笔者设计的验证系统主要有速度、加速度分析以及各个驱动轴的速度和加速度分析。

实际加工中选取参数为:允许弓高误差为 $1\text{ }\mu\text{m}$;机床运行的最大进给速度为 20 m/min ;机床所能承受的最大加速度为 10 m/s^2 。本研究以 $v=0, 0.5, 1$ 为例,即曲面的起始插补线条,中间任一插补线条以及终止插补线条,整体、全面地分析该算法,点击“弓高误差曲线”按钮,此时的弓高误差随插补时间曲线如图4所示。

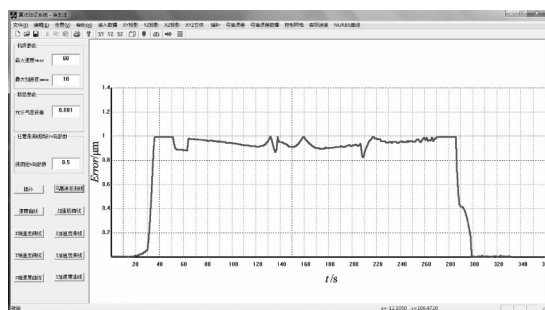
通过该实例曲线图可以直观地看出,所有的弓高误差都满足允许弓高误差 0.001 mm ,即 $1\text{ }\mu\text{m}$ 的要求,可见,该算法以及利用十字链叉的思想满足高精度的要求。

为了更好地证明该算法的优越性,本研究对进给速度为 60 m/min (目前速度较高水平)时的弓高误差曲线进行监视,该曲线如图5所示。

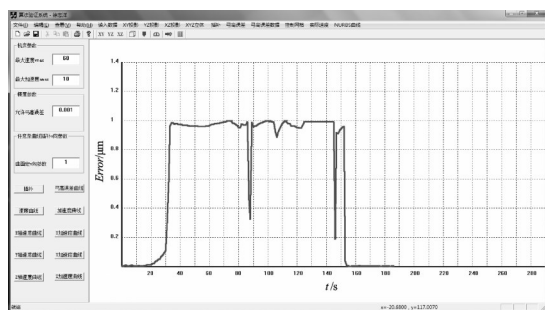
从图5中可以看出,在进给速度达到 60 m/min 时,其弓高误差仍在控制范围以内,而且此时插补总耗时都有缩短,所以该算法是正确有效的,能够达到高速、高精度的目标。



(a) $v=0$ 时的插补曲线弓高误差曲线



(b) $v=0.5$ 时的插补曲线弓高误差曲线



(c) $v=1$ 时的插补曲线弓高误差曲线

图5 进给速度为 60 m/min 下的弓高误差曲线

4 结束语

本研究首先根据德布尔递推算法的优越性,推导出了求取NURBS曲面上点的算法表达式,同时,对算法表达式进行了实时性的讨论分析。为了对推导出来的算法进行验证以及对插补的质量进行分析,笔者设计出一新的数据结构—十字链叉,在MFC平台上,设计出了一套算法验证系统,该系统集成了曲面显示、弓高误差分析、速度加速度分析等功能,本研究以汽轮机叶片为例,首先建立叶片模型,在算法验证系统里对其进行NURBS曲面插补算法的精度等分析,在系统中可以直观地看出插补精度均在控制精度以内,结果表明,该算法满足高速、高精度的目标。

基于十字链叉的NURBS曲面的插补算法的思想,不但可以保证插补质量,提高插补精度,甚至还能实现对插补算法的误差、速度、加速度等一些插补参数进行比较分析,还能在仿真中对加工过程中刀具与曲面之间的碰撞干涉检测,甚至可以实现验证当前CNC的数控插补代码的正确性,将使数控插补技术领域提升一个台阶。

参考文献(References):

- [1] 周云飞,李国其,周 济,等. CNC曲面直接插补(SDI)算法和系统[J]. 华中科技大学学报:自然科学版,1993,21(4):7-12.
- [2] 高三得,周云飞,张新访,等. 曲面直接插补和组合曲面的自适应加工[J]. 计算机辅助工程,1992,1(2):42-47.
- [3] 周艳红,周云飞,周 济. 自由曲面CNC高速高精加工[J]. 华中科技大学学报:自然科学版,1996,24(12):21-23.
- [4] 魏胜利,陈 玮,高军礼. 基于NURBS曲面的五轴联动插补算法[J]. 设计与研究,2007(11):29-32.
- [5] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀B样条[M]. 北京:高等教育出版社,2001.
- [6] 康宝生,杨宏娃,吕 科. 平面NURBS曲线的导矢及其等距线[J]. 计算机应用与软件,2001,18(11):60-63.
- [7] 周 凯,谭仲毅. PC数控系统的NURBS曲面插补控制方法[J]. 现代制造工程,2006(9):44-46.
- [8] 严蔚敏,吴伟民. 数据结构(C语言版)[M]. 北京:清华大学出版社,2007.
- [9] 黄丰磊,欧长劲,丁建波,等. 基于管管相贯的正轴插补算法的研究[J]. 轻工机械,2011,29(3):43-47.
- [10] 乐 英. 基于NURBS曲面的汽轮机叶片重构及插补算法的应用研究[D]. 保定:华北电力大学能源与动力工程学院,2011:36-54.
- [11] 孙 鑫,于安萍. VC++深入详解[M]. 北京:电子工业出版社,2009.

[编辑:张 翔]