

# 基于解析伪谱法的四边PDE曲面生成方法

樊志华<sup>1</sup>, 张靖磊<sup>2</sup>

- (1. 杭州电子科技大学 机械工程学院, 浙江 杭州 310018;
2. 杭州电子科技大学 计算机学院, 浙江 杭州 310018)

**摘要:** 为解决高效、快速、精确地生成曲面等问题,将偏微分方程(PDE)应用到曲面生成中(PDE方法优越性在于可以通过相对较少的参数生成一张光滑的曲面)。研究了用解析伪谱法快速生成一张解析近似的四边PDE曲面片,与分离变量法不同的是,该方法生成曲面的近似解由3部分组成:一个特征函数;一个多项式的解,两者皆可精确地满足偏微分方程;附加一个剩余函数,以确保精确的满足边界条件;进行了相同边界条件下分离变量法与解析伪谱法生成曲面的试验。实验结果表明,解析伪谱法生成的PDE曲面较分离变量法精确度高,且更为光滑。

**关键词:** 解析伪谱法;PDE曲面;四边面;边界

**中图分类号:** TP391;TH126.2      **文献标志码:** A

**文章编号:** 1001-4551(2012)08-0907-04

## Four sides PDE surfaces generation method based on Pseudo-spectral method

FAN Zhi-hua<sup>1</sup>, ZHANG Jing-lei<sup>2</sup>

- (1. School of Mechanical Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China;
2. School of Computer Science and Technology, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** In order to solve the problems of generate the surface quickly, efficiently and accurately, the partial differential equation(PDE) was applied to the surface generation. The power of the PDE method lies in its ability to represent smooth surfaces in terms of a relatively small set of design parameters. Based on PDE analytical method, a four sided PDE surface patch based on pseudo-spectral method for rapidly calculating an analytic approximation was investigated. Different from separation of variables, the generated approximate solution was consisted of three parts: an eigenfunction solution and a polynomial solution, both of which satisfied the generating partial differential equation exactly, and a remainder function ensured the boundary conditions were satisfied exactly. The method of separation of variables and analytic pseudo-spectral to generate surface were tested in the same boundary conditions. The experimental results show that the method based on pseudo-spectral has high accurate and more smooth compared with the separation of variables.

**Key words:** pseudo-spectral method; partial differential equation(PDE) surface; four sided surface; boundary

## 0 引 言

偏微分方程(PDE)曲面是一种新出现的强有力的曲面造型工具。一般地, PDE将曲面的生成问题看作是边界值问题<sup>[1]</sup>, 通常选择椭圆偏微分方程<sup>[2]</sup>, 由于PDE方法只需少量边界条件即可表示复杂的三维曲面, 所需存储量少, 因而高效。偏微分方程构造曲面应

用十分广泛, 例如飞机设计<sup>[3-4]</sup>、生物医学<sup>[5]</sup>等, 也曾作为一个基础软件包应用于机翼的设计<sup>[6]</sup>。为了生成PDE曲面, 须解出偏微分方程的解, 迄今为止, 存在许多数值法用于求解偏微分方程, 例如有限差分法、有限元法<sup>[7-8]</sup>。数值法只能生成近似的结果, 且效率低下。基于解析伪谱法生成四边曲面片具有高效、快速、精确的优点, 该方法生成曲面的近似解由3部分组成: 一个特

收稿日期: 2011-11-01

基金项目: 浙江省教育厅科研资助项目(Y201018019)

作者简介: 樊志华(1973-), 女, 四川简阳人, 讲师, 主要从事机械设计与理论、逆向工程、图形图像等方面的研究。 E-mail: fanzhih@163.com

征函数、一个多项式的解,两者皆可精确地满足偏微分方程;附加一个剩余函数,以确保精确地满足边界条件。

本研究主要介绍基于解析伪谱法的四边PDE曲面片生成方法,并与一般的分离变量法进行比较。

### 1 PDE 分离变量法生成曲面片

本研究在应用中,通常将曲面表示为含有参数的形式:  $X(u,v)$ , 参数  $u,v$  看作是在从平面区域  $\Omega$  到物理空间上的映射,记为:  $\Omega \rightarrow R^3$ 。PDE 曲面是一个参数曲面  $X=X(u,v)$ 。设  $\Omega=\{0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi\}$ , 给定类双调和方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + a\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)^2 X(u,v) = 0 \tag{1}$$

本研究取待生成的偏微分方程曲面的4条轮廓线作为4个边界条件,给定方程式(1)的4个傅里叶级数表示的周边边界条件为:

$$\begin{cases} X(0,v) = P_0(v) \\ X(s,v) = P_s(v) \\ X(t,v) = P_t(v) \\ X(1,v) = P_1(v) \\ X(u,0) = X(u,2\pi) \end{cases} \tag{2}$$

式中:  $P_0(v)$ ,  $P_1(v)$  一定义了曲面在  $u=0,1$  上的边界曲线;  $P_s(v)$ ,  $P_t(v)$  一定义了曲面在内部  $u=s,t$  上的边界曲线;  $X(u,0)=X(u,2\pi)$  一边界条件是周期的,即曲线为闭曲线。

通过分离变量法得到式(1,2)的解为:

$$X(u,v) = A_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(u)\cos nv + B_n(u)\sin nv) \tag{3}$$

$$\begin{cases} A_0(u) = a_{00} + a_{01}u + a_{02}u^2 + a_{03}u^3 \\ A_n(u) = (a_{n1} + a_{n2}u)\exp(anu) + (a_{n3} + a_{n4}u)\exp(-anu) \\ B_n(u) = (b_{n1} + b_{n2}u)\exp(anu) + (b_{n3} + b_{n4}u)\exp(-anu) \end{cases} \tag{4}$$

方程组中,未知数和方程个数都为4个,可以求出  $aa_0, sa_0, ta_0, pa_0, aa_n, sa_n, ta_n, pa_n, ab_n, sb_n, tb_n, pb_n$ 。若假设  $s=0.333\ 33, t=0.666\ 67$ , 给定边界条件为:

$$\begin{cases} p_0(v) = (4 \cos v, 4 \sin v, 0) \\ p_s(v) = (2 \cos v, 2 \sin v, 1) \\ p_t(v) = (2 \cos v, 2 \sin v, 2) \\ p_1(v) = (4 \cos v, 4 \sin v, 3) \end{cases} \tag{5}$$

由式(5)可知,傅里叶级数的最高项  $\cos v$  和  $\sin v$ , 最高项决定了  $n$  的取值上限,即  $n$  最大为1。则式(3)演化为:

$$X(u,v) = A_0(u) + A_1(u)\cos v + B_1(u)\sin v \tag{6}$$

将  $u=0, s, t, 1$  代入  $A_0(u), A_n(u), B_n(u)$  中,解得:  $a_{00} = 0.000\ 00, a_{00} = 3.000\ 13, a_{00} = -0.000\ 40, a_{00} = 0.000\ 27$ 。

同理可解其他系数。

### 2 解析伪谱法生成四边曲面片

本研究选择正则的PDE四边曲面片,采用的方法是寻找一个特征函数  $Xp(u,v)$ , 且  $Xp(u,v) = \sum \exp(\sigma v)\Phi(u)$ ,  $\exp(\sigma v)\Phi(u)$  是方程式(1)的4阶算符。为了有效地使用特征函数,本研究还需对方程式(1)补充一个多项式解  $Xc(u,v)$ , 确保满足特征函数的边界条件是连续的。为了精确地满足边界条件,本研究补充一个剩余项  $Xr(u,v)$ , 因此,可以得出方程式(1)的解的近似形式:

$$X(u,v) = Xc(u,v) + Xp^r(u,v) + Xr(u,v) \tag{7}$$

式中:  $Xp^r(u,v)$  一截断的特征函数;  $Xc(u,v)$  一多项式,即角点的解;  $Xr(u,v)$  一剩余项。

接下来研究如何给出方程式(1)右端的边界条件,设边界条件在  $u=0, u=1, v=0$  和  $v=1$  时,满足:

$$\begin{cases} X(0,v) = f1(v) \\ X(u,0) = f2(u) \\ X(1,v) = f3(v) \\ X(u,1) = f4(u) \end{cases} \tag{8}$$

由于边界相容性,有:

$$\begin{cases} f1(0) = f2(0) \\ f2(1) = f3(0) \\ f3(1) = f4(1) \\ f4(0) = f1(1) \end{cases} \tag{9}$$

为了求解方程式(1),除了上述的边界条件,还需要给出在  $\partial\Omega$  上的法矢:

$$\begin{cases} X_u(0,v) = fu1(v) \\ X_v(u,0) = fv2(u) \\ X_u(1,v) = fu3(v) \\ X_v(u,1) = fv4(u) \end{cases} \tag{10}$$

同样地,法矢满足边界相容性。此外,由于解是正则的,角点还需满足扭矢相容性。

#### 2.1 多项式的解

这一部分主要研究如何求解  $Xc(u,v)$ , 根据上一节分析,本研究可以给出角点处的边界条件,即对于每一对点,分别求其  $X(u,v)$ ,  $X_u(u,v)$ ,  $X_v(u,v)$ 。一般情况下,方程式(1)的角点多项式  $Xc(u,v)$  是4次多项式,4次多项式的可扩展性差,因其线性无关性,需要补充附加的条件来确定多项式的系数,可以将多项式设为6次多项式:

$$Xc(u,v) = \sum_{n=0}^6 \sum_{i=0}^n A_k u^n v^{(n-i)} \tag{11}$$

式中,  $A_k$  共有28个矢量常数,除了方程式(8,9,10)给出的12个边界条件,还需要16个方程式。不妨

给出角点处的扭矢:

$$\begin{cases} Xc_{uv}(0,0)=fu1_v(0) \\ Xc_{uv}(1,0)=fu3_v(0) \\ Xc_{uv}(1,1)=fu3_v(1) \\ Xc_{uv}(0,1)=fu1_v(1) \end{cases} \quad (12)$$

将方程式(11)代入方程式(1),且解的系数为0,可以给出另外6个方程:

$$\begin{cases} 24A_{11} + 8A_{13} + 24A_{15} = 0 \\ 120A_{16} + 24A_{18} + 24A_{20} = 0 \\ 24A_{17} + 24A_{19} + 120A_{21} = 0 \\ 360A_{22} + 48A_{24} + 24A_{26} = 0 \\ 24A_{24} + 48A_{26} + 360A_{28} = 0 \\ 120A_{23} + 72A_{25} + 120A_{27} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

为了满足线性无关性,本研究给出补充的6个方程:

$$\begin{cases} Xc_{uv}(0,0)=f2_{uv}(0) \\ Xc_{uv}(1,0)=f2_{uv}(1) \\ Xc_{uv}(1,1)=f4_{uv}(1) \\ Xc_{uv}(0,1)=f4_{uv}(0) \\ Xc_{uv}(0,0)=f1_{uv}(0) \\ Xc_{uv}(0,0)=f2_{uv}(0) \end{cases} \quad (14)$$

通过上述分析,可以求出  $A_k$  的28个系数。

### 2.2 寻找特征函数

通过2.1节的研究,可以给出特征函数边界条件满足  $Xp(u,v)=X(u,v)-Xc(u,v)$ ,相应地由方程式(8,10,12)可以得出边界条件。本研究将方程式(1)进行缩放,先求  $u=0$  的情况,给定边界条件为:

$$\begin{cases} \phi(0,v)=\phi(1,v)=0 \\ \phi_u(0,v)=\phi_u(1,v)=0 \end{cases} \quad (15)$$

同样地,也可以设  $v=0$ ,从边界条件可得:

$$\begin{cases} \phi(u,0)=g0(u) \\ \phi(u,1)=g1(u) \\ \phi_v(u,0)=gv0(u) \\ \phi_v(u,1)=gv1(u) \end{cases} \quad (16)$$

从方程式(8,10,12)可知:

$$\begin{cases} g0(0)=g0(1)=g1(0)=g1(1)=0 \\ g0_u(0)=g0_u(1)=g1_u(0)=g1_u(1)=0 \end{cases} \quad (17)$$

注意到:

$$gv0(0)=gv0(1)=gv1(0)=gv1(1)=0 \quad (18)$$

接下来本研究寻找方程式(1)的特征函数,考虑式(1)分离变量的形式  $\phi = \exp(\sigma v)\Phi(u)$ ,  $\sigma$  是一个常数,也可以是复数,则  $\Phi(u)$  的解为:

$$\Phi(u) = A \sin(\sigma u) + B \cos(\sigma u) + C u \sin(\sigma u) + D u \cos(\sigma u) \quad (19)$$

式中:  $A, B, C, D$  一常数;  $\sigma$  一特征值,有  $\sin^2 \sigma = \sigma^2$ 。

则相应的特征函数为:

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \sin \sigma \sin(\sigma u) + \\ & (\sigma \cos \sigma - \sin \sigma) u \sin(\sigma u) \\ & - u \sigma \sin \sigma \cos(\sigma u) \end{aligned} \quad (20)$$

$\Phi(u)$  是 Papkovitch-Fadle 函数,一般情况下分为奇函数和偶函数,  $\sigma$  是复特征值且已知,由于线性无关性,且  $\phi$  是实数,则有:

$$\phi = \text{Re} \left[ \sum_n \frac{\Phi_n(u, \sigma_n)(B_n \exp(\sigma_n v) + C_n \exp(-\sigma_n v))}{C_n} \right] \quad (21)$$

$\Phi_n(u, \sigma_n)$  是特征函数,相应的特征值  $\sigma_n$ ,  $\text{Re}$  表示实数部分。施加边界条件,使用方程式(21),截断其前  $N$  项。由于在角点处满足边界条件,当  $u=0, u=1$  时也满足上述等式。不妨将其简化为:

$$F_k(u, \sigma_n, B_n, C_n) = 0 \quad k=1, \dots, 4 \quad (22)$$

设  $u_i = (i-1)/(m-1)$ ,  $i=2, \dots, m-1$ , 代入方程式(22),令  $\chi = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{k=1}^4 F_k^2(u_i, \sigma_n, B_n, C_n)$ , 设  $\partial \chi / \partial \alpha_r = 0$ 。其中

$r=1, \dots, 4N$ , 且  $B_n$  和  $C_n$  表示  $\alpha_r$ , 由上式可知,通过最小二乘拟合共有  $4N$  个方程和  $4N$  个未知数。由此求出的  $\phi$  设为  $\phi_1$ , 且满足边界条件,交换  $u, v$ , 求出  $\phi_2$ , 则  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ , 且满足方程式(1)。

根据上述论述,可以求出  $Xp(u,v)$ , 用  $Xp^u(u,v)$  表示其逼近的解。因此方程(1)的逼近形式  $X(u,v) = Xp^u(u,v) + Xc(u,v)$ 。

### 2.3 剩余函数求解

为了精确地满足边界条件,还需要补充剩余项  $Xr(u,v)$ , 通过上述方法可求得边界条件。为了求  $Xr(u,v)$ , 可以采用孔斯曲面,其混合函数  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$  满足:

$$\begin{cases} \alpha_0(0)=1 \quad \alpha_0(1)=0 \\ \alpha_1(0)=0 \quad \alpha_1(1)=1 \\ \alpha'_0(0)=\alpha'_0(1)=\alpha'_1(0)=\alpha'_1(1)=0 \\ \beta_0(0)=\beta_0(1)=\beta_1(0)=\beta_1(1)=0 \\ \beta'_0(0)=1 \quad \beta'_0(1)=0 \\ \beta'_1(0)=0 \quad \beta'_1(1)=1 \end{cases} \quad (23)$$

则  $Xr(u,v)$  的形式为:

$$Xr(u,v) = [\alpha_0(u), \alpha_1(u), \beta_0(u), \beta_1(u)] \begin{bmatrix} f1r(v) \\ f3r(v) \\ fu1r(v) \\ fu3r(v) \end{bmatrix} + [f2r(u), f4r(u), fv2r(u), fv4r(u)] \begin{bmatrix} \alpha_0(v) \\ \alpha_1(v) \\ \beta_0(v) \\ \beta_1(v) \end{bmatrix} \quad (24)$$

由此可以解出  $Xr(u, v)$ 。

### 3 实 例

首先用求PDE四边面的解析伪谱法实现了文献[1]的例子。设：

$$X(u, v) = (c(u)\cos v, c(u)\sin v, e(u) + d(u)\cos v)$$

且：

$$\begin{cases} c(u) = (x_1 + ux_2)\exp(u) + (x_3 + ux_4)\exp(-u) \\ d(u) = (z_1 + uz_2)\exp(u) + (z_3 + uz_4)\exp(-u) \\ e(u) = (3h - s_1)u^2 + (s_1 - 2h)s^3 \end{cases}$$

已知：

$$\begin{cases} x_1 = -1.504\ 054, x_2 = 0.989\ 137\ 9 \\ x_3 = 3.504\ 054, x_4 = 3.018\ 969 \\ z_1 = -5.070\ 437, z_2 = -3.013\ 659 \\ z_3 = 7.070\ 437, z_4 = 8.127\ 216 \\ h = 5, s_0 = -1, s_1 = 1 \end{cases}$$

边界条件：

$$\begin{cases} f1(v) = 2(\cos v, \sin v, \cos v) \\ f2(u) = (f(u), 0, zs(u) + g(u)) \\ f3(v) = (\cos v, \sin v, h) \\ f4(u) = (f(u)\cos 1, f(u)\sin 1, zs(u) + g(u)\cos 1) \\ fu1(v) = s0(\cos v, \sin v, \cos v) \\ fv2(u) = (0, f(u), 0) \\ fu3(v) = (0, 0, s1) \\ fv4(u) = (-f(u)\sin 1, f(u)\cos 1, -g(u)\sin 1) \end{cases}$$

通过上述给定的条件，可以求出角点，给定混合函数：

$$\begin{cases} \alpha 0 = 1 - 3u^2 + 2u^3 \\ \alpha 1 = 3u^2 - 2u^3 \\ \beta 0 = u - 2u^2 + 3u^3 \\ \beta 1 = -u^2 + u^3 \end{cases} \quad (25)$$

特征函数取前7项， $N=7$ ，通过该方法生成的曲面片如图1所示。

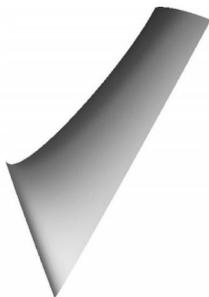


图1 四边曲面片的例子1

采用分离变量法生成的曲面如图2所示。



图2 四边曲面片的例子2

图1生成的曲面很大程度上逼近正确的解，与图2对比，图1更为光滑。

### 4 结 束 语

笔者研究了用解析伪谱法快速生成一张解析近似的4边PDE曲面片，该方法生成曲面的近似解主要由3部分组成：一个特征函数；一个多项式的解，两者皆可精确地满足偏微分方程；附加一个剩余函数，以确保精确地满足边界。本研究进行了相同边界条件下分离变量法与解析伪谱法生成曲面的试验。实验结果表明，基于解析伪谱法生成的PDE曲面较分离变量法精确度高，且更为光滑。

#### 参考文献(References)：

[1] BLOOR M I G, WILSON M J. An analytic pseudo-spectral method to generate regular 4-sided PDE surface patch[J]. **Computer Aided Geometric Design**, 2005, 22(3): 203 - 219

[2] 朱心雄. 自由曲线曲面造型技术 [M]. 北京:科学出版社, 2008.

[3] SEVANT N E, BLOOR M I G, WILSON M J. Cost-effective multipoint design of a blended HSCT [J]. **AIAA J. Aircraft**, 1999, 36(2): 642 - 650.

[4] SEVANT N E, BLOOR M I G, WILSON M J. Aerodynamic design of a flying wing using response surface methodology [J]. **AIAA J. Aircraft**, 2000, 37(4): 562 - 569.

[5] BLOOR M I G, WILSON M J. Method for efficient shape parameterization of fluid membranes and vesicles[J]. **Phys. Rev. E**, 2000, 61(4): 4218 - 4229.

[6] HUBAND J, LI W, SMITH R. An explicit representation of Bloor - Wilson PDE surface model by using canonical basis for Hermite interpolation [J]. **Mathematical Engineering in Industry**, 1999, 7(4): 421 - 431.

[7] 周立春, 陈 健, 林海波, 等. 内螺旋曲面数控拉刀设计及应用研究[J]. **轻工机械**, 2011, 29(3): 35-38.

[8] 项筱洁. 基于粗糙度形成机理的曲面高速铣精加工参数选用[J]. **机电工程**, 2011, 28(4): 436-439.

[编辑:张 翔]