

点到参数曲面的最小距离的研究*

刘桂英

(广西师范学院 物理与电子工程学院, 广西 南宁 530023)

摘要: 针对求最小距离常用的搜索算法,其稳定性和有效性通常不高的问题,研究了如何求点到参数曲面的最小距离。采用了基于参数曲面的几何特性,将求最小值问题转化为方程组求解问题,应用计算复杂度较低的离散牛顿法,并且将其迭代区间进行了细分,并在各个细分区间中应用离散牛顿迭代算法,增强了算法的稳定性。研究表明,离散牛顿法有较好的稳定性和有效性。

关键词: 参数曲面;最小距离;离散牛顿法

中图分类号: TP391.72

文献标志码:A

文章编号: 1001-4551(2012)04-0474-03

Research on minimum distance from a point to a parametric surface

LIU Gui-ying

(College of Physics and Electronic Engineering, Guangxi Teachers Education University,
Nanning 530023, China)

Abstract: In order to solve the problems of the poor stability and the low efficiency of the searching algorithm, it was studied that how to compute the minimum distance from a point to a parametric surface. Based on the geometric characteristics of the parametric surface, a method was presented to find the minimum distance by finding roots of an equation group. Discrete Newton method was adopted to solve the equation. The experimental results show that discrete Newton method is stable and efficient.

Key words: parametric surface; minimum distance; discrete Newton method

0 引言

在机器人中普遍存在的碰撞检测场合^[1],以及在数控加工中需要计算加工刀具与加工物体的最小距离以求不划破被加工物体等,都要求解点到曲线曲面的最小距离^[2]。计算机图形学中的碰撞检测与动画模拟,同样也经常需要用到物体间的距离计算^[3-5]。

对于给定点 Q ,若在参数曲面上某点处 M 达到,则向量 \overline{QM} 与 M 点处的法向量 \vec{N}_M 是平行的,因此可以得到一个方程组。对于方程组的求解^[6-8],则应用计算复杂度较低的离散牛顿法,即将其迭代区间进行细分并在各个细分区间中应用离散牛顿迭代算法。

本研究探讨求点到参数曲面的局部极值距离的计算方法,并通过实例验证该算法的有效性。

1 算法思想

参数曲面:

$$P(u, v) = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (1)$$

其中: $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$ 。

设 $P(u, v)$ 是参数曲面(1)上的任一点,则点 $P(u, v)$ 的法向量为:

$$\vec{N}_p = \vec{P}_v \times \vec{P}_u \quad (2)$$

本研究先求给定点 Q 到参数曲面 S 的最小距离 d_{\min} ;参数曲面 S 上的一点 $P(u, v)$ 处的法向量 \vec{N}_p 是唯一的;给定一个点 Q ,若 Q 到参数曲面 S 的局部极值距离(包含极大与极小)在参数曲面上某点 P 处达到,则应

收稿日期: 2011-09-28

基金项目: 广西自然科学基金资助项目(桂科自0991103); 广西教育厅科研资助项目(201010LX283); 广西科学研究与技术开发计划资助项目(桂科攻10100002-8)

作者简介: 刘桂英(1961-),女,江西南昌人,教授,主要从事电力电子技术和计算机应用等方面的研究. E-mail: liugy78@163.com

有 \overline{QP} 向量与 P 点处的法向量 \vec{N}_P 是平行的,也就是两者的叉积为零向量,即:

$$\overline{QP} \times \overline{NP} = 0 \quad (3)$$

因此可以得到求最小距离 d_{\min} 的算法思想如下:

首先,据式(3)得到由3个关于未知数 u 和 v 的方程联立的方程组,求解此方程组而得出点 Q 到参数曲面 S 的所有极值距离 D_1, D_2, \dots, D_n 。在得到了所有的局部极值距离之后,再利用文献[9]的方法,求出点 Q 到参数曲面的边界线的最小距离 D_e ,则可以得到 $d_{s\min} = \min\{D_e, D_1, D_2, \dots, D_n\}$ 。

下面详细介绍求解 Q 到参数曲面 S 的所有局部极值距离 D_1, D_2, \dots, D_n 。

2 点到参数曲面的局部极值距离

参数曲面 $S: P=P(u, v)$, 每个点 P 的法向量 \vec{N}_P 由式(2)得到。若参数曲面 S 上的点 P 满足极值距离条件,则应有 P 满足式(3),而式(3)是一个方程组,不妨记之为:

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 0 \\ f_2(u, v) = 0 \\ f_3(u, v) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

利用向量形式:

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ f_3(X) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in R^2$$

式(4)可以记为:

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = 0 \quad (5)$$

式(5)是一个方程个数大于未知数个数的非线性方程组。

2.1 解非线性方程组的迭代法

设有非线性方程组:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中: $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 一实变量的非线性函数,它是给定的多元函数 ($i = 1, 2, \dots, n$)。

而对式(6)可用向量形式表示,引进记号:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{X}) \\ f_2(\mathbf{X}) \\ \dots \\ f_n(\mathbf{X}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n \quad (7)$$

于是式(6)可写为:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0 \quad (8)$$

对于式(8)的求解,最常用的方法也是最基本的迭

代方法即牛顿法,牛顿法的处理过程如下:

对于非线性方程组 $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$, 其中: $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X}))^T$, 由 $f_i(\mathbf{X})$ 偏导数做成的矩阵记为 $\mathbf{J}(\mathbf{X})$ 或 $\mathbf{F}'(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{F}'(\mathbf{X}) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{X})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{X})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{X})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{X})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{X})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{X})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

本研究设 \mathbf{X}^* 为 $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$ 的解,且设 $\mathbf{X}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ 为 \mathbf{X}^* 的近似解,现利用多元函数 $f_i(\mathbf{X})$ 在 $\mathbf{X}^{(k)}$ 的泰勒公式有:

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{X}) &= f_i(\mathbf{X}^{(k)}) + (x_1 - x_1^{(k)}) \frac{\partial f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_1} + \dots + \\ & (x_n - x_n^{(k)}) \frac{\partial f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_n} + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^n (x_j - x_j^{(k)})(x_l - x_l^{(k)}) \frac{\partial^2 f_i(C_i)}{\partial x_j \partial x_l} \\ & \equiv P_i(\mathbf{X}) + R \end{aligned} \quad (10)$$

其中: $P_i(\mathbf{X}) = f_i(\mathbf{X}^{(k)}) + (x_1 - x_1^{(k)}) \frac{\partial f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_1} + \dots + (x_n - x_n^{(k)}) \frac{\partial f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_n}$, $R = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^n (x_j - x_j^{(k)})(x_l - x_l^{(k)}) \frac{\partial^2 f_i(C_i)}{\partial x_j \partial x_l}$, C_i 在 $\mathbf{X}^{(k)}$ 与 \mathbf{X} 的所连的线段内。

如果用式(10)中线性函数 $P_i(\mathbf{X})$ 近似代替 $f_i(\mathbf{X})$, 且有线性方程组:

$$\begin{aligned} P_i(\mathbf{X}) &= f_i(\mathbf{X}^{(k)}) + (x_1 - x_1^{(k)}) \frac{\partial f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_1} + \dots + \\ & (x_n - x_n^{(k)}) \frac{\partial f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_n} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

本研究将上述方程组的解作为 \mathbf{X}^* 的第 $k+1$ 次近似解 $\mathbf{X}^{(k+1)}$ 。

将式(11)写成矩阵形式,即:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k)}) = 0$$

如果 $\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})$ 为非奇异矩阵,则得到牛顿迭代公式:

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{(0)} (\text{初始向量}) \\ \mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - [\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}) \end{cases} \quad (12)$$

求解非线性方程组 $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$ 牛顿方法或者用下面形式:

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{(0)} (\text{初始向量}) \\ \mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)}) \Delta \mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}) \\ \mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \Delta \mathbf{X}^{(k)} \end{cases} \quad (13)$$

所以由牛顿法计算公式(13)可知,每计算一步 $\mathbf{X}^{(k)} \rightarrow \mathbf{X}^{(k+1)}$,需要:

- (1) 计算矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})$ 及 $\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})$;
- (2) 求解一个线性方程组: $\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})\Delta\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})$;
- (3) 计算 $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \Delta\mathbf{X}^{(k)}$ 。

而在实际中有很多问题的 $F'(X)$ 计算很复杂。此时,本研究将 $F'(X)$ 的元素用相应的差商代替,即:

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(\mathbf{X}_j^{(k)}) - f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{h} \quad (14)$$

其中, h 足够小,且:

$$f_i(\mathbf{X}_j^{(k)}) = f_i(x_1^{(k)}, \dots, x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)} + h, x_{j+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \quad (15)$$

则 $\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})\Delta\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})$ 变为:

$$\sum_{i=1}^n f_j(\mathbf{X}_i^{(k)})z_i^{(k)} = f_j(\mathbf{X}^{(k)}), \text{ 其中 } j=1, 2, \dots, n \quad (16)$$

$$z_i^{(k)} = \frac{\Delta x_i}{h + \sum_{k=1}^n \Delta x_k}, \text{ 其中 } i=1, 2, \dots, n \quad (17)$$

2.2 点到参数曲面的局部极值距离的求解

对于式(5),虽然不能直接用2.1节中的讨论过的离散牛顿法,但对它进行稍微的变形就可以适用式(5),变形的离散牛顿法如下:

取初值 $\mathbf{X}=(u,v)$, $t, h > 0, 0 < t < 1$, 则:

- (1) 计算 $f_i(x) \rightarrow B(i)$, 其中 $i=1, 2$ 。
- (2) 若满足 $\max_{1 \leq i \leq 2} |B(i)| < \varepsilon$, 则再判断是否有 $f_3(u,v) < \varepsilon$, 若同样满足则方程组的一组实数解为 $\mathbf{X}=(u,v)^T$; 计算过程结束; 否则继续。
- (3) 计算 $f_i(x) \rightarrow A(i)$, 其中 $i=1, 2, \dots, n$; 其中 $\mathbf{X}_1=(u+h, v)^T$, $\mathbf{X}_2=(u, v+h)^T$ 。
- (4) 解线性代数方程组 $AZ=B$, 其中 $\mathbf{Z}=(z_1, z_2)$; 且计算 $\beta = 1 - (z_1 + z_2)$ 。
- (5) 计算 $u - hz_1/\beta \rightarrow u$, $\mathbf{X}=(u,v)^T$, $v - hz_2/\beta \rightarrow v$ 。
- (6) $t \times h \rightarrow h$, 转(1)。

上述过程一直进行到 \mathbf{X} 满足精度要求为止。由此利用变形的离散牛顿法可以求出达到局部最小距离的点 P_1, P_2, \dots, P_n 。

3 实 例

本研究采用的实例是一个双二次 Bezier 曲面,即

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 B_{i,2}(u)B_{j,2}(v)P_{ij}, \quad u, v \in [0, 1], \text{ 其9个控制$$

顶点是:

$$P_{00}=(-3.8, 0.3, 0.0), P_{01}=(-0.5, 2.0, 0.0), P_{02}=(2.2, 1.0, -0.4);$$

$$P_{10}=(-4.0, 0.1, -2.0), P_{11}=(-0.5, 5.0, -2.0), P_{12}=($$

$$4.0, 0.4, -3.0);$$

$$P_{20}=(-2.1, 3.6, -4.0), P_{21}=(-0.5, 4.0, -5.0), P_{22}=(3.1, 4.7, -4.0)。$$

应用本研究的算法计算给定点 Q 到此双二次 Bezier 曲面的最小距离的结果如图1、图2所示。

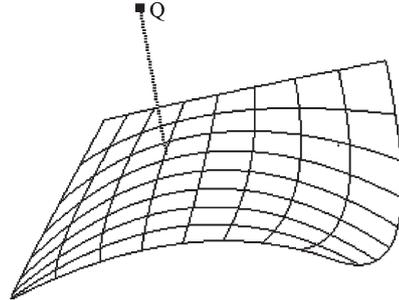


图1 参数曲面结果1

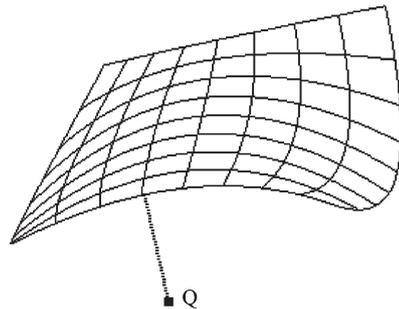


图2 参数曲面结果2

图1中给定点 $Q=(-1.440\ 000, 5.680\ 000, -1.280\ 000)$, 所求的最小距离 $d_{\min}=10.314\ 6$; 图2中给定点 $Q=(-0.906\ 667, -0.773\ 333, 0.320\ 000)$, 所求的最小距离 $d_{\min}=4.267\ 38$ 。

4 结 束 语

对于参数曲面,如果在参数曲面 S 上的 R 点达到由给定点 Q 到曲面 S 的局部极小或局部极大距离,那么应有 Q 点到 R 点的向量与 R 点的法向量是平行的,由此得到一个方程组。通过解这个方程组就可以得到 Q 点到曲面 S 的局部极值距离,再与 Q 点到曲面 S 的边界线上的最小距离进行比较,便得到给定点 Q 到曲面 S 的最小距离。

由上述算法可知,算法的关键部分在于方程组的求解。而对于方程组的求解则是今后所要完善的地方。本研究采用离散牛顿法来解非线性方程组,但是离散牛顿法是一种迭代算法,而且只是一种局部收敛算法,其结果非常依赖于所给定的初值。所以在本研究的算法中将求根的区域进行了足够小的划分,并在每个小的区域中使用离散牛顿法以求出其所有根。本研究用 OpenGL^[10-11]进行了实现,从所做实验的例子来看,效果也是非常不错的。

(下转第481页)

通过分析上述3组实验可以看出,实验初期,由于移动机器人对未知环境的先验知识不足,最终导致路径规划陷入冲突。多次训练后,移动机器人通过在线学习累积经验,完成了对未知环境的自适应,最终顺利地通过障碍环境到达目标点。另外,随着未知环境中障碍物复杂程度的增加,移动机器人到达目标点的成功率有所降低,但仍可以体现出移动机器人对未知环境有较高的自适应能力。

3 结束语

本研究提出了一种基于Q学习算法的路径规划方法,根据Q学习算法的必要因素设计学习系统结构,结合模糊逻辑方法对学习系统的输入状态进行泛化处理,在不同障碍环境中进行了仿真实验,结果表明了移动机器人具有较强的自学习能力,通过在线学习能顺利完成未知环境中的自适应路径规划,证明了该方法的有效性。

本研究为移动机器人平台的实地实验提供了理论基础和数据参考。

参考文献(References):

- [1] ELSHAML A. Mobile Robots Path Planning Optimization in Sstatic and Dynamic Environments[D]. The University of Guelph,2004.
- [2] YEN G G, HICKY T W. Reinforcement learning algorithms

for robotic navigation in dynamic environments [J]. **ISA Transactions**,2004(43):217-230.

- [3] 单建华. 未知环境下移动机器人实时模糊路径规划[J]. 机电工程,2009,26(1):1-4.
- [4] ZAMSTEIN L M. Path Planning Using Reinforcement Learning on a Real Robot in a Real Environment[D]. The University of Florida,2009.
- [5] 陈春林. 基于强化学习的移动机器人自主学习及导航控制[D]. 合肥:中国科学技术大学信息科学技术学院,2006.
- [6] BEOM H R, CHO H S. A sensor-based navigation for a mobile robot using fuzzy-logic and reinforcement learning[J]. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, 1995,25(3):464-477.
- [7] 秦 政,丁福光,边信黔. 强化学习在移动机器人自主导航中的应用[J]. 计算机工程与应用,2009,43(18):215-217.
- [8] WATKINS J C H. Q-learning[J]. **Machine Learning**,1992(8):279-292.
- [9] 王炎欢,陈阿三,刘鑫茂. 直角坐标机器人控制系统的研制[J]. 轻工机械,2010,28(4):67-69.
- [10] MARTINEZ-MARIN T, RODRIGUEZ R. Navigation of Autonomous Vehicles in Unknown Environments using Reinforcement Learning[C]//Proceedings of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium Istanbul,2007.
- [11] 陈卫东,李宝霞,朱奇光. 模糊控制在移动机器人路径规划中的应用[J]. 计算机工程与应用,2009,45(31):221-223.

[编辑:张 翔]

(上接第476页)

参考文献(References):

- [1] SNYDER J M, WOODBURY A R, FLEISCHER K, et al. Interval Methods for Multi-Point Collisions between Time-Dependent Curved Surfaces[C]//Proceedings Siggraph 93, New York,1993:321-334.
- [2] LENNERZ C, SCHÖMER E. Efficient Distance Computation for Quadratic Curves and Surfaces[C]//2nd Conference on Geometric Modeling and Processing, GMP'02, 2002:60-69.
- [3] CHEN X D, YONG J H, ZHENG G Q, et al. Computing minimum distance between two implicit algebraic surfaces [J]. **Computer-Aided Design**,2006,38(10):1053-1061.
- [4] JIMNEZ P, THOMAS F, TORRAS C. 3D collision detection: a survey [J]. **Computers & Graphics**, 2001, 25(2):269-285.
- [5] JOHNSON D E, COHEN E. A Framework for Efficient Mini-

mum Distance Computations [C]//Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation, Leuven,998:3678-3684.

- [6] 冯果忱. 非线性方程组的迭代解法[M]. 上海:上海科学技术出版社,1989.
- [7] 易大义,沈云宝,李有法. 计算方法[M]. 杭州:浙江大学出版社,2002.
- [8] 周立春,陈 健,林海波,等. 内螺旋曲面数控拉刀设计及应用研究[J]. 轻工机械,2011,29(3):35-38.
- [9] 钱 春. 基于区间牛顿法的点到参数曲线最小距离的计算方法[J]. 机电工程,2010,27(1):82-84.
- [10] 廖朵朵,张华军. OpenGL三维图形程序设计[M]. 北京:星球地图出版社,1996.
- [11] 李 颖,薛海斌,朱伯立,等. OpenGL函数与范例解析手册[M]. 北京:国防工业出版社,2002.

[编辑:张 翔]