

# 悬臂梁式压电发电结构理论模型及其仿真研究\*

王浩金, 邬丹燕, 肖 金, 王光庆\*  
(浙江工商大学 信息与电子工程学院, 浙江 杭州 310018)

**摘要:**为提高压电悬臂梁发电能力以及将压电发电技术应用到日常生活中,开展了压电振动理论分析,建立了压电装置的发电能力与压电材料的厚度比、长度以及悬臂梁的材料、长度等之间的关系,提出了数学建模的分析方法,在理论上对压电悬臂梁的发电能力进行了评价,并进行了 Matlab 仿真实验。其结果表明:悬臂梁压电发电模型中,压电材料存在最佳厚度比,而且金属板材料不同时,最佳厚度随杨氏模量比的增加而减少;当输出负载阻抗等于压电材料的输入阻抗时,发电装置的输出功率达到最大。

**关键词:**压电;悬臂梁;仿真

中图分类号:TN384;TM91

文献标志码:A

文章编号:1001-4551(2011)11-1412-04

## Theoretical model and simulations of piezoelectric cantilever generators

WANG Hao-jin, WU Dan-yan, XIAO Jin, WANG Guang-qing

(College of Information and Electronics Engineering, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:**In order to solve the problems of improving the piezoelectric cantilever power generation capacity, the piezoelectric power generation technology was investigated. After the analysis of piezoelectric vibration theory, the expressions between piezoelectric material's thickness, length and cantilever's material, length had on the generating ability of the device was established. A method was presented to mathematical modeling. The capacity of cantilever piezoelectric power generation device was evaluated on the theory, the Matlab simulations were tested. The experimental result shows that, for piezoelectric cantilever generators, there is a best thickness ratio for the cantilever material, and the best thickness decreases as the Young modulus increases when the material is different, and when the output impedance equals to materials' input impedance, the output power is at its maximum.

**Key words:** piezoelectric; cantilever; simulation

## 0 引 言

压电晶体属于非中心对称点群晶体,机械载荷作用导致其内部晶胞正负电荷中心产生偏移从而引发极化,这就是正压电效应。反之,如果晶体在外加电场激励下集体在某个方向将产生变形叫做逆压电效应<sup>[1-3]</sup>。由于这个性质,压电材料被广泛地应用在传感器和执行器上,压电材料也被用作发电,但是,压电材料的电源特性很差(高电压、低电流、高阻抗),尤其在低频情况下表现得更加明显,这严重限制了压电发电器的发展和应用。近年来,压电发电器在嵌入式 MEMS 及收

集环境能、收集生物机械能等方面呈现出广阔的应用潜力,因此备受关注<sup>[4-7]</sup>。

在 1996 年,日本的 Mkiyo Umeda 研究了利用电容来储存来自发电装置发出的电量。在 1998 年,美国科学家 Jhon Kymissis 进行了压电发电装置电容储能电路的深入研究,并设计了一种专门为微电子设备供电的电容储能电路。以上这些基础性的工作为压电发电的研究提供了宝贵的经验。在压电发电领域中,电量储存的研究基本局限于以电容作为电量储存的媒介的方法上,在国内,尚未发现以可充电电池为压电发电储能媒介的研究。在国外,利用充电电池作为电脑

收稿日期:2011-04-27

基金项目:浙江省新苗人才计划资助项目(未提供)

作者简介:王浩金(1989-),男,浙江富阳人,主要从事压电方面的研究。E-mail:whj19891118@163.com

通信联系人:王光庆,男,副教授。E-mail:kele76@163.com

的储存媒介的方法研究也刚起步,在 2005 年,美国的 Henry A.Sodan 进行了不同压电材料对充电电池的充电研究,其实验中用的压电振子面积大,不适用于小体积机电设备的自身供能<sup>[8-9]</sup>。

本研究利用悬臂梁的压电发电装置,进行了压电振动能量的采集理论与仿真研究。

### 1 压电发电理论模型

当压电悬臂梁受到外力作用时,压电材料的产生形变,使其表面产生电荷,而电量的多少取决于应力的分布状态及形变形状。故压电方程是全面描述机电耦合与变换中应力  $T$ 、应变  $S$ 、电场强度  $E$ 、电位移  $D$  这 4 个变量之间的线性关系的数学表达式。它集中表达了正、逆压电效应变量间的定量关系。压电体在  $T$  和  $E$  作用下,产生应变  $S$  与电位移  $D$  的方程为:

$$S = s^E T + \mathbf{d}^T E, D = \mathbf{d} T + \varepsilon^T E \quad (1)$$

式中:  $s^E$ —恒定电场下的弹性柔顺系数;  $\mathbf{d}$ —压电应变常数;  $\varepsilon^T$ —自由状态下的介电常数;  $\mathbf{d}^T$ —逆压电常数矩阵。

本研究设压电晶体产生的应变的时间函数为  $S(t)$ , 则压电晶体的应力、电位移、内部电场均为时间函数, 用  $E(t), D(t), T(t)$  表示<sup>[10]</sup>。则上式可表示为:

$$S(t) = s^E T(t) + \mathbf{d}^T E(t) \quad (2)$$

$$D(t) = \mathbf{d} T(t) + \varepsilon^T E(t) \quad (3)$$

整理变换后的方程,消去,得到方程:

$$D(t) = \frac{\mathbf{d}}{s^E} S(t) + \bar{\varepsilon} E(t) \quad (4)$$

其中:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon^T (1 - k^2)$$

式中:  $k$ —机电耦合系数,  $k = \mathbf{d} / \sqrt{s^E \varepsilon^T}$ 。

本研究对电位移  $D(t)$  进行面积分,则压电晶体产生的束缚电荷可表示为:

$$Q(t) = \iint D(t) dS = \iint \left[ \frac{\mathbf{d}}{s^E} S(t) + \bar{\varepsilon} E(t) \right] dS \quad (5)$$

式中:  $S$ —压电晶体电极的面积。

假设两电极面平行,则压电晶体的内部电场各处相等,方程式(5)可整理成:

$$Q(t) = \int_s \left[ \frac{\mathbf{d}}{s^E} S(t) \right] dS + S \bar{\varepsilon} E(t) \quad (6)$$

由于电流  $i = dQ/dt$ , 电流方程为:

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d \left\{ \int_s \left[ \frac{\mathbf{d}}{s^E} S(t) \right] dS \right\}}{dt} + S \bar{\varepsilon} \frac{dE(t)}{dt} \quad (7)$$

上式即为压电发电的理论基础。研究对象悬臂梁式压电发电装置结构如图 1 所示。它是典型的双晶压电梁发电装置,用于研究在给定外力或端部位移的激励方式下金属板厚度及材料性能对发电能力的影响。压电梁的长为  $L$ 、宽为  $W$ 、高为  $h$ , 下标  $p$  和  $m$  分别代表压电片和基板<sup>[11]</sup>。

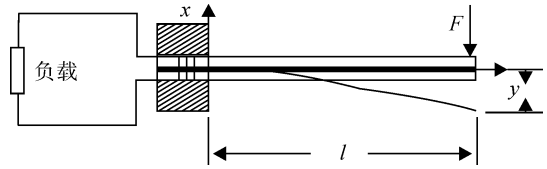


图 1 悬臂梁发电装置

现将金属板厚度与总厚度  $h$  的比值定为厚度比:

$$\alpha = h_m / h \quad (8)$$

则压电片厚度分别为:

$$h_p = (1 - \alpha) h / 2 \quad (9)$$

显然, 当压电梁端部的作用力或位移一定时, 所产生的应力和应变是  $\alpha$  的函数, 理论上存在最佳的  $\alpha$  使其发电能力最大。根据材料的弹性理论, 压电片的应力的关系为:

$$T_p = E_p (S_1 - g_{31} D_3) \quad (10)$$

$$E_3 = -g_{31} T_p + \beta_{33}^T D_3 \quad (11)$$

式中:  $S_1$  和  $T_p$ — $x$  方向的应变和应力;  $S_1 = -\rho Z$ ;  $\rho$ —曲率半径;  $g_{31}$ —压电电压常数;  $E_p$ —压电材料的杨氏模量;  $D_3$  和  $E_3$ — $z$  方向的电位移和电场强度;  $\beta_{33}^T$ —介电隔离,  $\beta_{33}^T = 1/\varepsilon_{33}^T$ ;  $\varepsilon_{33}^T$ — $z$  方向的介电常数,  $\varepsilon_{33}^T = 1300\varepsilon_0$ 。

对于对称结构的双晶梁, 变形后的中介层即为其几何中心层, 其上表面到中介层的距离为  $Z_s = h/2$ 。当压电梁自由端受到外力作用时, 力矩方程:

$$M = n \int_0^W \int_{-h_p}^{Z_0} z T_p dy dz + \int_0^W \int_{Z_s+h_p}^{Z_0} z T_m dy dz = (x-L) F \quad (12)$$

式中:  $n$ —压电片数量,  $T_m$ —基板在  $x$  方向的应力<sup>[12-13]</sup>,  $T_m = E_m S_1$ 。

故其曲率半径为:

$$\rho = -\frac{3}{A E_p W h^3} [2(1 - \alpha + \beta)] \quad (13)$$

其中:

$$A = 1 - \alpha^3 + \alpha^3 \beta, \beta \text{ 为杨氏模量比, } \beta = E_m / E_p。$$

根据压电应力与应变的关系方程求出电场强度

$E_3$ , 将其对  $z$  积分求的电压, 写成电位移的表达式即为:

$$D_3 = \frac{1-\alpha+\alpha\beta}{(1-\alpha)\beta_{33}^T B W h^2} [6\alpha(1-\alpha)\beta_{31}g_{31}(x-L)F + 2AhWV] \quad (14)$$

其中:  $B = -3(1-\alpha)(1+\alpha)^2 k_{31}^2 + 4A(1+k_{31}^2)$ ,  $k_{31}^2 = E_p g_{31}^2 / \beta_{33}^T$ 。

将电位移对于面积积分的到电荷量:

$$Q = 2 \int_0^W \int_0^L D_3 dy dx = -\frac{12(1+\alpha)g_{31}L}{\beta_{33}^T B_b h^2} \quad (15)$$

电荷对时间微分得到电流:

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} \quad (16)$$

根据电荷与电压的关系可以求得电压:

$$C = \frac{Q}{U} \quad (17)$$

压电材料的自由电容为:

$$C_p = \frac{16ALW}{(1-\alpha)\beta_{33}^T B_b h} \quad (18)$$

故可以求得电压方程:

$$U = \frac{3\alpha(1-\alpha^2)\beta_{31}g_{31}L}{AWh} F \quad (19)$$

其输出功率:

$$P = UI = \frac{9\alpha(1-\alpha)(1+\alpha^2)g_{31}L^2\beta}{ABWh^3\beta_{33}^T} \left[ \frac{dF}{dt} \right]^2 \quad (20)$$

用  $U_g$  表示其电能:

$$U_g = Pt = UQ/2 = \frac{9(1-\alpha)(1+\alpha)^2 k_{31}^2 L^3}{2ABE_p W h^3} F^2 \quad (21)$$

## 2 压电发电性能仿真

根据式(16,19)可知,压电发电元件可等效成一恒流源,其等效电路模型如图 2 所示。图中的  $i(t)$ 、 $C_p$  可分别由式(16)和式(18)来确定。本研究选定压电发电结构材料与尺寸如表 1 所示。

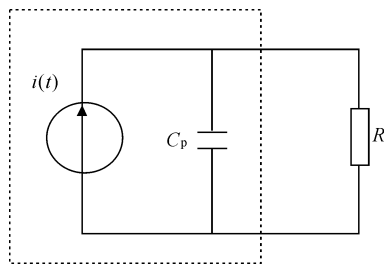


图 2 压电发电等效电路

表 1 压电发电结构参数

参数	数值	参数	数值
$L/mm$	50	$E_m/GPa$	7.3
$h_p/mm$	0.5	$E_p/GPa$	8.2
$W/mm$	30	$g_{31}/(Vm/N)$	$10.6 \times 10^{-3}$
$F/N$	1.2	$\epsilon_0$	$8.85 \times 10^{-12}$

本研究利用 Matlab 进行仿真。以下仿真主要针对厚度比及材料对压电发电性能的影响。由于电极处于等位面上,可以认为电压不随压电材料的长度变化而变化。厚度比对发电能力的影响如图 3 所示,由图可知在改变厚度比的情况下,可以清晰地得出最佳厚度比为 0.2。

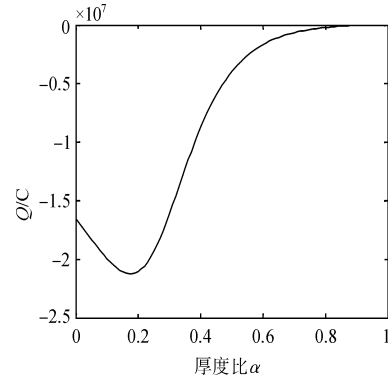


图 3 厚度比对发电能力的影响

压电梁的厚度比对压电材料产生电荷量的影响如图 4 所示,从中也可以看出最佳厚度比为 0.2。

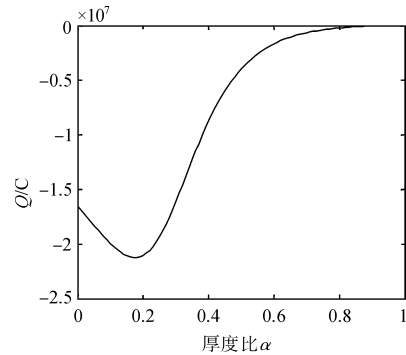


图 4 厚度比  $\alpha$  对电荷量  $Q$  的影响

厚度比对比发电电压的影响如图 5 所示,从图中可以看出如果仅从电压来说的话最佳厚度比应为 0.4。

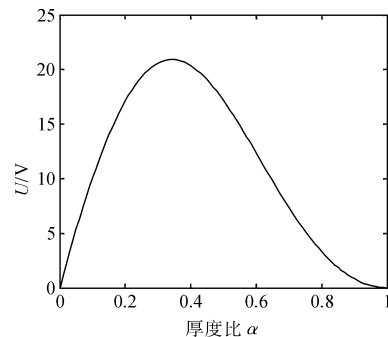


图 5 厚度比对发电电压的影响

本研究根据以上仿真得出结论,压电材料的厚度对发电性能具有一定的影响,故在选择材料上要进行一定的分析。

本研究选定压电梁的厚度比  $\alpha=0.2$ , 改变压电片所受到的力  $F$  的大小, 给定  $F$  为一个周期性变化的量, 假设压电片作无阻尼简谐运动, 最大  $F=1.2\text{ N}$ , 所以力随时间的变化函数为  $F(t) = F\sin(t)$ , 仿真得到的结果如图 6 所示。

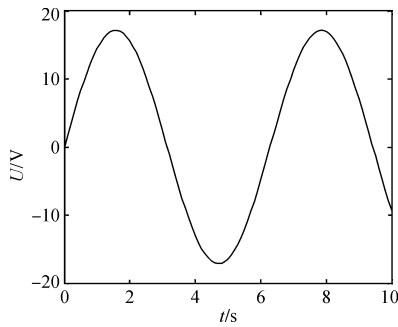


图 6 力变化比对电压  $U$

由此可以得出,压电量产生的电压与所受外力相关,并随着力的变化而不断变化。

使压电梁输出电压如图 6 所示,在压电发电的输出端接上纯电阻,通过 Matlab 得出其功率仿真情况如图 7 所示。

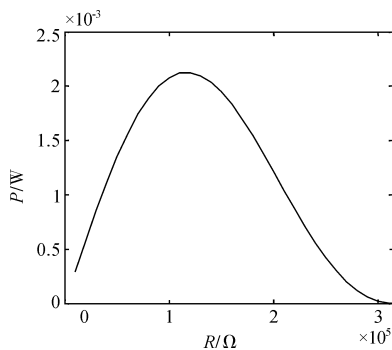


图 7 负载电阻对输出功率的影响

当接入的负载为电容或者电感时,得到的结果大致如图 7 所示,在最大的功率输出时,二者的阻抗都相等:

$$Z_c = Z_r = Z_l = \frac{1}{j\omega C} = 1.143 \times 10^5 \Omega \quad (22)$$

### 3 结束语

本研究通过建立压电发电数学模型以及性能仿真,得出:

(1) 输出参数表达式清楚地反映了各结构尺寸参数、材料参数、外部作用参数对压电发电机性能的影响关系,可用作压电发电器的优化设计;

(2) 选择适当的输出负载以及压电材料,能够使输出功率达到最大;

(3) 负载阻抗必须和压电发电装置的阻抗完全匹配,此时系统的输出特性达到最佳。容性负载的输出功率和转换效率均比纯电阻负载要低;

(4) 所建立的模型包含了压电发电悬臂梁的尺寸裁量性能参数等,可用于悬臂梁压电发电性能的预测分析。

### 参考文献(References):

- [1] HENRY A S, DANIEL I. A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials [J]. *The Shock and Vibration Digest*, 2004, 36(3): 197-205.
- [2] LEFEUVRE E, BADEL A, RICHARD C, et al. A comparison between several vibration-powered piezoelectric generators for standalone systems [J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2006, 126(2): 405-416.
- [3] INGO K, DJORDDJE M, GERALD E, et al. A new approach for MEMS power generation based on a piezoelectric diaphragm [J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2008, 142(1): 292.
- [4] 杜小振, 褚金奎, 朴相镐, 等. 基于微型悬臂梁的发电机制探索[J]. *中国机械工程*, 2005(1): 41-13.
- [5] ROUNDY S, WRIGHT P K, RABAEY J. A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes [J]. *Computer Communications*, 2003(26): 1131-1144.
- [6] 孙宝元. 现代执行器技术[M]. 长春: 吉林大学出版社, 2003.
- [7] 张福学. 现代压电学[M]. 北京: 科技出版社, 2002.
- [8] ROUNDY S, WRIGHT P K. A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics [J]. *Smart Materials and Structures*, 2004(13): 1131-1142.
- [9] STEPHEN R P, SHANE F, HANI H. On low-frequency electric power generation with PZT ceramics [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2005, 10(2): 240-252.
- [10] 王 强, 骆 英, 顾建祖. 基于压电材料的振动能量获取技术的研究 [J]. *电子元件与材料*, 2008, 27(3): 47-50.
- [11] 魏双会, 褚金奎, 杜小振. 压电发电机建模研究 [J]. *传感器与微系统*, 2008, 27(4): 22-27.
- [12] 闫世伟, 杨志刚, 阙君武, 等. 压电陶瓷能量转换系统 [J]. *吉林大学学报: 工学版*, 2008, 38(2): 344-348.
- [13] 阙君武, 唐可洪, 王淑云, 等. 压电悬臂梁发电装置的建模与仿真分析 [J]. *光学精密工程*, 2008, 16(1): 71-75.

[编辑: 李 辉]