

基于六项余弦窗函数插值 FFT 的谐波分析方法

周 琍

(解放军汽车管理学院 装备技术系, 安徽 蚌埠 233011)

摘要: 在分析电网谐波时, 很难实现同步采样和整周期截断, 因此采用傅里叶方法必然存在频谱泄露和栅栏效应。加窗插值 FFT 算法是减小频谱泄露和栅栏效应的有效方法。为减小长范围泄露, 将六项余弦窗函数应用于电力系统谐波分析, 并且推导出了谐波参数的插值修正公式, 其插值系数具有简单的显示表达式, 计算量小。对该算法与 Hanning 窗和 Blackman-Harris 窗插值 FFT 算法进行了 Matlab 仿真对比研究, 验证了该算法具有更高的分析精度。对微波炉电流实测数据的分析结果进一步验证了所提算法的有效性。

关键词: 谐波; 同步采样; 六项余弦窗; 插值快速傅里叶变换; 电力系统

中图分类号: TM714

文献标志码: A

文章编号: 1001-4551(2011)08-1015-04

Harmonic analysis algorithm based on six-term cosine window interpolation FFT

ZHOU Li

(Department of Equipment Technology, Management Institute of Automobile, Bengbu 233011, China)

Abstract: It is very difficult to achieve synchronous sampling and integrated-cycle truncation when power system harmonics are analyzed. Therefore, there inevitably exists spectral leakage and fence effect. The windowed interpolation FFT algorithm is the effective method to reduce spectral leakage and fence effect. In order to reduce long range leakage, a 6-term cosine window function was applied to harmonics analysis of power system. The interpolation estimation formulas of harmonics parameters were derived, moreover its interpolation coefficient has explicit expression and computation load is low. Comparison with the Hanning and Blackman-Harris interpolation FFT method was conducted by Matlab simulation. The result verifies the higher analysis accuracy of the proposed algorithm. The analysis results to testing data of microwave oven current further demonstrate the validity of the proposed algorithm.

Key words: harmonic; synchronous sampling; 6-term cosine window; interpolation fast Fourier transform (FFT); power system

0 引 言

电力电子装置和非线性负载的广泛应用, 使电网中产生了大量的高次谐波^[1], 谐波能够恶化电能质量和影响电力系统的安全经济运行, 因此必须对谐波进行准确测量。

快速傅里叶变换 (FFT) 是电力系统谐波分析的有力工具, 但在非同步采样和非整周期截断时, 频谱泄漏和栅栏效应会影响 FFT 算法的谐波分析精度^[2]。为提高 FFT 算法的分析精度, 加窗插值 FFT 算法被提出, 其原理是通过加窗运算减少频谱泄漏, 通过插值运算消除栅栏效应^[3]。由于余弦窗的频谱简单, 因而应

用最为普遍, 常用的余弦窗函数有 Hanning 窗^[4]、Blackman 窗^[5]、Blackman-Harris 窗^[6]、Rife-Vincent 窗^[7]、Nuttall 窗^[8]等。加窗插值 FFT 算法的性能受窗函数的影响较大^[9], 不同窗函数抑制频谱泄漏的程度和插值公式的计算复杂度都有所不同。例如, Hanning 窗的插值公式简单, 但对谐波参数的估计精度不高; Blackman-Harris 窗的分析精度高, 但它的插值修正公式计算复杂。因此, 选择合适的窗函数能够减小算法的计算复杂度和提高算法的谐波分析精度。

一个理想的窗函数应具有主瓣宽度窄、最大旁瓣低和旁瓣衰减速度快的特点, 但三者之间存在着矛盾。本研究首先分析了六项余弦窗函数的特点, 然后推导

收稿日期: 2011-03-16

作者简介: 周 琍 (1980-), 女, 安徽怀远人, 主要从事电工理论与新技术方面的研究. E-mail: lylyzh1@126.com

了其插值 FFT 算法的插值修正公式。其插值系数具有简单的显式表达式,谐波参数的估计公式计算简单,易于硬件实现。仿真和实验结果都表明,所提算法的谐波参数估计精度高,适合于电力系统谐波的精确测量。

1 六项余弦窗函数的特点

余弦窗函数时域表达式的一般形式为^[10]:

$$w(n) = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m a_m \cos(2\pi n \cdot m/N) \quad (1)$$

式中: M —窗函数的项数; $n = 0, 1, \dots, N-1$, N —窗函数的长度。

窗函数可从主瓣宽度、最大旁瓣和旁瓣衰减速度 3 个角度进行优化,得到窗函数的系数。基于旁瓣衰减速度最快的原则得到六项余弦窗函数的系数为^[11]: $a_0 = 0.246\ 093\ 75$, $a_1 = 0.410\ 156\ 25$, $a_2 = 0.234\ 375$, $a_3 = 0.087\ 890\ 625$, $a_4 = 0.019\ 531\ 25$, $a_5 = 0.001\ 953\ 125$ 。其频域特性如图 1 所示,与 Hanning 窗和 Blackman-Harris 窗的旁瓣特性对比结果如表 1 所示。

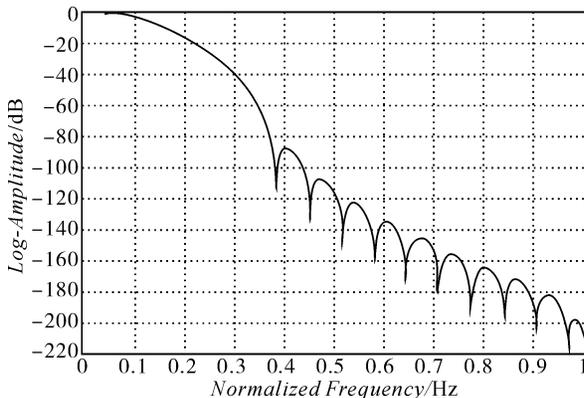


图 1 六项余弦窗函数的频谱

表 1 窗函数的旁瓣特性

窗的类型	旁瓣峰值/dB	衰减速度/dB
Hanning	-31	18
Blackman-Harris	-92	6
6-term cosine window	-88	66

由表 1 可见,六项余弦窗函数的旁瓣衰减速度远高于 Hanning 窗和 Blackman-Harris 窗,最大旁瓣低,并且插值 FFT 算法简单明了,因此,更适合对电力谐波准确分析。

2 六项余弦窗插值 FFT 算法

为简化分析,设信号表达式为:

$$x_m(t) = A_m e^{j(2\pi f_m t + \phi_m)} \quad (2)$$

式中: A_m , f_m , ϕ_m —幅值、频率和相位。

在采样频率 f_s 下,本研究以六项余弦窗函数对其进行 N 点截断,得到离散序列 $x(n)$ 为:

$$x(n) = x_m(n) \cdot w(n); n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

式中: $w(n)$ —六项余弦窗函数。

余弦窗函数的离散时间傅立叶变换(DTFT)表达式为:

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{a_m}{2} [W_R(e^{j(\omega - \frac{2\pi m}{N})}) + W_R(e^{j(\omega + \frac{2\pi m}{N})})] \approx \sum_{m=0}^{M-1} \frac{a_m}{2} (W_R(\omega - \frac{2\pi m}{N}) + W_R(\omega + \frac{2\pi m}{N})) \cdot e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} = W(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \quad (4)$$

式中: $W_R(e^{j\omega})$ —矩形窗的 DTFT 频谱, $W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$; $W_R(\omega)$ —矩形窗的幅度谱, $W_R(\omega) = \sin(N\omega/2)/\sin(\omega/2)$ 。

因此可得信号 $x(n)$ 的 DTFT 数字频谱为:

$$X(\lambda) = A_m W(\lambda - \lambda_m) e^{j[-\frac{N-1}{N}\pi(\lambda - \lambda_m) + \phi_m]} \quad (5)$$

$$W(\lambda) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{a_m}{2} [W_R(\lambda - m) + W_R(\lambda + m)] \quad (6)$$

式中: $W_R(\lambda)$ —矩形窗的数字幅度谱, $W_R(\lambda) = \sin(\lambda\pi)/\sin(\lambda\pi/N)$, $\lambda = N \cdot f/f_s$, $\lambda_m = N \cdot f_m/f_s$ 。

由于 λ 只能取 $0 \sim (N-1)$ 之间的整数,则有:

$$\lambda_m = k_m + \delta_m \quad (7)$$

式中: k_m —正整数, $0 \leq \delta_m < 1$ 。

当同步采样时, $\delta_m = 0$, 非同步采样时, $\delta_m \neq 0$, 即发生了栅栏效应,可通过插值算法求解。

定义 $x(n)$ 幅度谱线上的两个相邻峰值之比为:

$$\beta_m = \frac{|X(k_m + 1)|}{|X(k_m)|} \quad (8)$$

根据式(5~8),当窗函数为本研究所述的六项余弦窗时,可得谱峰比和插值系数 δ_m 分别为:

$$\beta_m = \frac{5 + \delta_m}{6 - \delta_m} \quad (9)$$

$$\delta_m = \frac{6\beta_m - 5}{1 + \beta_m} \quad (10)$$

根据 δ_m 可以估计出谐波的频率、幅值和相位:

$$f_m = (k_m + \delta_m) f_s / N \quad (11)$$

$$A_m = |X(k_m)| \cdot \pi \delta_m (1 - \delta_m^2) (4 - \delta_m^2) (9 - \delta_m^2) \cdot (16 - \delta_m^2) (25 - \delta_m^2) / (3 \cdot 543.75 \sin(\delta_m \pi)) \quad (12)$$

$$\phi_m = \text{angle}[X(k_m)] - \delta_m \pi \frac{N-1}{N} \quad (13)$$

可见,对于本研究所述的六项窗函数,其插值系数 δ_m 具有显式表达式,谐波参数估计公式简单明了,

更易于实现。

对于电网信号,由于谐波分量远小于基波分量,基波频率的估计精度要远高于各次谐波频率的估计精度。因此,各次谐波的插值系数由基波的插值系数来确定,将提高插值 FFT 算法的分析精度。即:

$$k_m = \text{floor}[m\lambda_1] = \text{floor}[m(k_1 + \delta_1)] \quad (14)$$

$$\delta_m = m\lambda_1 - k_m = m(k_1 + \delta_1) - k_m \quad (15)$$

式中:floor(·)—按下限取整;λ₁—基波的数字频率,λ₁ = k₁ + δ₁; λ_m—m 次谐波的数字频率,λ_m = k_m + δ_m。

3 仿真结果

为验证提出的六项窗插值 FFT 算法的有效性,本研究将该算法与 Hanning 窗和 Blackman-Harris 窗插值 FFT 算法进行 Matlab 仿真对比研究。设信号表达式为:

$$x(t) = \sum_{m=1}^9 A_m \cos(2\pi m f_1 t + \phi_m) \quad (16)$$

其中,基波频率为 50.1 Hz,各谐波的幅值和相位如表 2 所示。

表 2 谐波的幅值和相位设定值

谐波次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
幅值 / V	100	0.5	1.5	0.8	2.0	0.6	1.5	0.7	1.2
相位 / (°)	10	40	80	120	170	210	270	300	330

采样频率为 10 kHz,采样点数 2 048 点,约 10 个基波周期。本研究采用 Hanning 窗、Blackman-Harris 窗及提出的六项窗插值 FFT 算法得到的基频、各谐波幅值和相位分析结果分别如表 3~5 所示。

表 3 基波频率的估计结果

类型	Hanning	Blackman-Harris	6-term window
基频 / Hz	50.099 9	50.100 0	50.100 0
误差 / (%)	-1.9e-4	-2.1e-8	6.3e-9

表 4 谐波幅值的估计结果

m	Hanning		Blackman-Harris		results/V	error/(%)
	results/V	error/(%)	results/V	error/(%)		
1	100.000 5	5.5e-4	100.000 0	1.2e-7	100.000 0	1.6e-9
2	0.508 7	1.7	0.500 0	5.8e-3	0.500 0	4.1e-4
3	1.495 4	-3.1e-1	1.500 0	-5.3e-5	1.500 0	2.4e-7
4	0.800 5	6.4e-2	0.800 0	2.1e-5	0.800 0	1.0e-6
5	1.999 6	-2.0e-2	2.000 0	-2.1e-6	2.000 0	-9.0e-8
6	0.599 9	-1.6e-2	0.600 0	5.7e-5	0.600 0	3.3e-6
7	1.499 7	-1.9e-2	1.500 0	-2.8e-5	1.500 0	-2.0e-6
8	0.699 8	-2.3e-2	0.700 0	-6.5e-5	0.700 0	-3.6e-6
9	1.200 0	-1.3e-3	1.200 0	5.2e-6	1.200 0	4.0e-7

表 5 谐波相位的估计结果

m	Hanning		Blackman - Harris		6 - term window	
	results/(°)	error/(°)	results/(°)	error/(°)	results/(°)	error/(°)
1	10.028	0.028	10.023	0.023	10.023	0.023
2	36.663	-3.337	40.032	0.032	40.045	0.045
3	80.000	-0.000	80.069	0.069	80.069	0.069
4	119.950	-0.050	120.004	0.004	120.004	0.004
5	170.032	0.032	170.027	0.027	170.027	0.027
6	209.999	-0.001	210.049	0.049	210.049	0.049
7	270.090	0.090	270.072	0.072	270.072	0.072
8	300.033	0.033	300.007	0.007	300.007	0.007
9	330.060	0.060	330.030	0.030	330.030	0.030

本研究由仿真结果可见:Hanning 窗的分析精度最低,Blackman-Harris 窗次之,而六项窗的分析精度最高。

4 实验研究

本研究通过电参量数据采集系统得到微波炉工作时的电流数据。该系统采用 14 位 A/D 转换器,采样频率为 10 kHz,数据长度为 2 048 点,约 10 个周期。

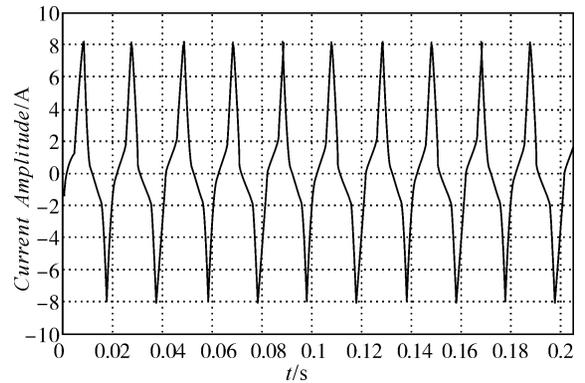


图 2 微波炉电流实际值与拟合值的对比结果

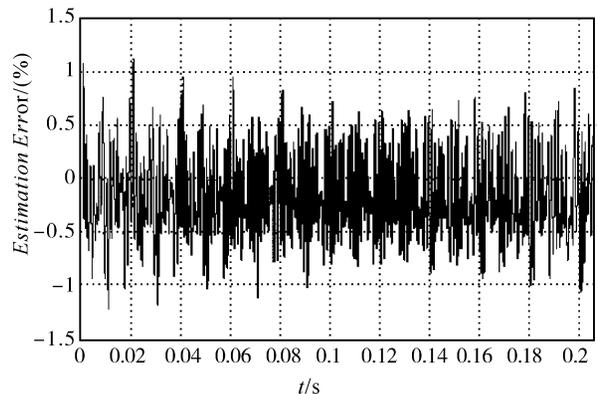


图 3 微波炉电流的估计误差

笔者用本研究所述的六项窗函数插值 FFT 算法对微波炉电流进行谐波分析,得到频率、幅值和相位的分析结果如表 6 所示。限于篇幅仅列出 10 次谐波以内的结果。微波炉电流实际值与拟合值的对比如图 2

所示,图中虚线为拟合结果,实线为实际波形。进一步得出误差曲线如图 3 所示。可见,所提算法能够准确分析出微波炉电流的谐波参数。

表 6 微波炉电流的分析结果

谐波次数	频率 / Hz	幅值 / A	相位 / (°)
1	49.988 4	5.181 8	214.149 6
2	99.976 7	0.005 7	274.499 4
3	149.965 1	2.258 9	254.968 8
4	199.953 5	0.005 0	188.998 8
5	249.941 8	0.765 9	304.284 7
6	299.930 2	0.002 2	283.410 3
7	349.918 6	0.131 8	16.744 9
8	399.906 9	0.001 7	197.909 7
9	449.895 3	0.065 6	195.098 7
10	499.883 7	0.000 5	292.321 2

5 结束语

本研究分析了六项余弦窗函数的旁瓣特性,推导了其插值 FFT 算法,得出插值系数的显式公式,其频率、幅值和相位的估计公式简单明了。提出的谐波分析方法具有插值修正公式简单,计算量小,分析精度高的优点。仿真和实验结果都表明,该算法适合电力系统谐波的准确测量。

参考文献 (References):

[1] YACAMINA R. Power system harmonics part 4, interharmonic[J]. **Power Engineering Journal**, 1996, 10(4): 185-193.

[2] ZHANG F, GENG Z, YUAN W. The algorithm of interpolating windowed FFT for harmonic analysis of electric power

system [J]. **IEEE Transactions on Power Delivery**, 2001, 16(2): 160-164.

[3] JAIN V K, COLLINS W L, DAVIS D C. High-accuracy analog measurements via interpolated FFT[J]. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, 1979, 28(2): 113-122.

[4] 祁才君,陈隆道,王小海. 应用插值 FFT 算法精确估计电网谐波参数[J]. **浙江大学学报:工学版**,2003, 37(1): 112-116.

[5] 周俊,王小海,祁才君. 基于 Blackman 窗函数的插值 FFT 在电网谐波信号分析中的应用[J]. **浙江大学学报:理学版**,2006, 33(6): 650-653.

[6] 赵文春,马伟明,胡安. 电机测试中谐波分析的高精度 FFT 算法[J]. **中国电机工程学报**,2001, 21(12):83-87,92.

[7] QIAN H, ZHAO R, CHEN T. Interharmonics analysis based on interpolating windowed FFT algorithm[J]. **IEEE Transactions on Power Delivery**, 2007, 22(2): 1064-1069.

[8] 卿柏元,滕召胜,高云鹏,等. 基于 Nuttall 窗双谱线插值 FFT 的电力谐波分析方法[J]. **中国电机工程学报**, 2008,28(25): 153-158.

[9] RELJIN I S, RELJIN B D, PASIC V. Extremely flat-top windows for harmonic analysis[J]. **IEEE Transactions on Instrument and Measurement**, 2007, 56(3): 1025-1041.

[10] HARRIS F J. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform[J]. **Proceedings of the IEEE**, 1978, 61(1): 51-83.

[11] HUANG S, FAN X, LIU S, et al. Research on Optimized Combined Cosine Windows with Maximum Side Lobe Decay for Harmonic Analysis[C]// Second International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation, 2009:277-281. [编辑:张翔]

(上接第 1014 页)

[4] 洪晓明,叶明,孟明. 一种新的阈值方法在肌电信号消噪中的应用[J], **机电工程**, 2009, 26(10): 90-98.

[5] 柯慧,顾洁. 电能质量信号的小波阈值去噪[J]. **电力系统及其自动化学报**, 2010, 22(2): 103-108.

[6] 熊玲玲,刘会金,金涌涛,等. 小波包在暂态电能质量分析中的应用[J]. **电工技术**, 2004, 8(4): 27-30.

[7] BURLY S, DARNELL M. Robust impulse noise suppression using adaptive wavelet denoising [C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Munich, Germany, 1997: 3417-3420.

[8] DONOHO D L. De-noising by soft-thresholding[J]. **IEEE Transactions Information Theory**, 1995, 41(3): 613-

627.

[9] SONG G X, ZHAO R Z. Three novel models of threshold estimator for wavelet coefficients [C]//Proceedings of the Second International Conference on wavelet Analysis and Its Applications. Hong Kong, China, 2001: 145-150.

[10] 蒋克荣,唐向清,朱德泉. 基于改进阈值小波算法的汽车轮速信号处理[J]. **仪器仪表学报**, 2010, 31(4): 736-740.

[11] 张飞. 基于小波包变换的多阈值法语音信号去噪净化[J]. **通信技术**, 2009, 42(8):118 - 122.

[编辑:李辉]