

单级旋转倒立摆极点配置与二次型最优控制

曾孟雄,方春娇,赵千惠

(三峡大学 机械与材料学院,湖北 宜昌 443002)

摘要:为了使旋转倒立摆的旋臂与摆杆始终保持在垂直姿态,通过对单级旋转倒立摆系统结构和动力学分析,建立了合理的状态空间模型并进行了线性化处理,分别通过极点配置和二次型最优控制进行了控制优化,并在 Matlab 中进行了仿真分析,实现了对旋臂与摆杆的控制。研究表明,二次型最优控制具有更好的响应性能和算法简单等特点,在实际应用中具有重要意义。

关键词:倒立摆;极点配置;二次型最优控制

中图分类号:TP13

文献标识码:A

文章编号:1001-4551(2010)03-0060-04

Pole placement and quadratic optimal control for the signal arm-driven inverted pendulum

ZENG Meng-xiong, FANG Chun-jiao, ZHAO Qian-hui

(College of Mechanical & Material Engineering, China Three Gorges University, Yichang 443002, China)

Abstract: Aiming at remaining of a rotary inverted pendulum always in the upright posture, by analyzing structure and dynamics of the signal rotary inverted pendulum, a rational state-space model was established and treated with linearization process. The inverted pendulum system was controlled, respectively, by the pole placement and the quadratic optimal control, which was simulated and analyzed in Matlab. The controlling of the spiral arm and pendulum was realized. The results indicate that the quadratic optimal control has better responded performance and characters, such as simple algorithm. It has a great signify in the practical application.

Key words: arm-driven inverted pendulum; pole placement; quadratic optimal control

0 引 言

倒立摆系统是一个典型的多变量、非线性、绝对不稳定、高阶次和强耦合系统。倒立摆仿真或实物控制实验是控制领域中用来检验某种控制理论或方法之有效性的典型方案。倒立摆系统的研究能有效反映控制中的非线性、鲁棒性、镇定、随动以及跟踪等典型问题。同时倒立摆的动态过程与人类的行走姿态类似,其平衡与火箭的发射姿态调整类似,因此倒立摆在研究双足机器人直立行走、火箭发射过程的姿态调整、海上钻井平台的稳定控制和飞行器着陆过程等领域中有重要意义^[1-2],研究倒立摆的精确控制策略对工业生产中复杂对象的控制有着重要的应用价值^[3-4]。

本研究主要探讨单级旋转倒立摆极点配置与二次

型最优控制。

1 单极旋转式倒立摆结构及数学模型

1.1 单级旋转倒立摆系统结构

倒立摆基本工作原理是用一种强有力的控制方法使倒立摆的摆杆和旋臂保持在垂直姿态。按摆杆数量,倒立摆系统分为一级(单级)、二级、三级等倒立摆,多级摆的摆杆之间属于自有连接(即无电动机或其他驱动设备)。单级旋转倒立摆系统主要由控制对象(摆杆和旋臂)、机箱、直流力矩电机、支架和计算机组成,其基本结构图如图 1 所示。

倒立摆系统的输入为小车的旋臂和摆杆的倾斜角度期望值,计算机在每一个采样周期中采集来自传感

器的旋臂与摆杆的实际位置信号,与期望值进行比较后,通过控制算法得到控制量,再经数/模转换驱动直流电机实现倒立摆的实时控制。单极旋转倒立摆的控制框图如图2所示。

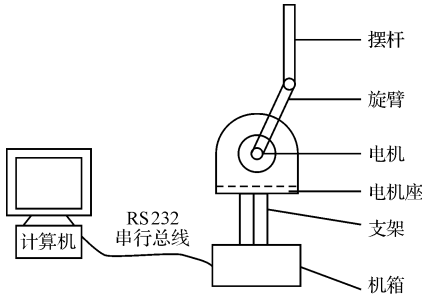


图1 旋转倒立摆结构图

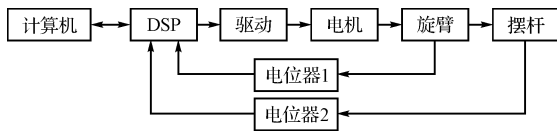


图2 旋转倒立摆控制框图

1.2 旋转倒立摆的状态空间模型

本研究忽略系统中部分摩擦因素的影响,建立了倒立摆系统数学模型。该倒立摆可抽象为如图3所示的受力模型。

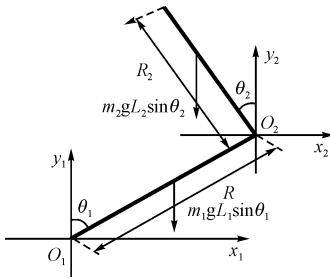


图3 系统受力分析

θ_1, θ_2 —旋臂和摆杆与垂直线的夹角,以顺时针方向为正;
 m_1, m_2 —旋转质量和摆杆质量; R —旋臂长度; R_2 —摆杆长度;
 L_1 —旋臂质心到转轴距离; L_2 —摆杆质心到转轴距离

以摆杆为研究对象,在非惯性系 $x_2O_2y_2$ 中,有:

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + f_2 \dot{\theta}_2 = M_{12} + m_2 g L_2 \sin \theta_2 \quad (1)$$

式中 M_{12} —旋臂对摆杆的力矩,为惯性力矩,满足下列关系:

$$M_{12} = m_2 L_2 [R \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - R \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

以旋臂为研究对象,在惯性系 $x_1O_1y_1$ 中,有:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + f_1 \dot{\theta}_1 = M_0 + M_{21} + m_1 g L_1 \sin \theta_1 \quad (2)$$

式中 M_0 —电机输出转矩, $M_0 = K_m(u - K_e \dot{\theta}_1)$, u —加在电机上的控制电压,为系统的输入; M_{21} —摆杆对旋臂的作用力矩。

有下列关系成立:

$$M_{21} = m_2 g R \sin \theta_1 - m_2 g R^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 L_2 R [\ddot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \quad (3)$$

消去中间变量 M_{21} 和 M_{12} , 可得非线性数学模型:

$$\begin{bmatrix} J_1 + m_2 R^2 & m_2 R L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 R L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 + K_m K_e & m_2 R L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ m_2 R L_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_m \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} m_1 g L_1 \sin \theta_1 + m_2 g R \sin \theta_1 \\ m_2 g L_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

倒立摆的控制目的是使摆杆和旋臂的角度为零,因此,在 $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ 附近将非线性数学模型线性化,得:

$$\begin{bmatrix} J_1 + m_2 R^2 & m_2 R L_2 \\ m_2 R L_2 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 + K_m K_e & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 L_1 + m_2 R) g & 0 \\ 0 & m_2 g L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_m \\ 0 \end{bmatrix} u$$

系统的状态空间模型为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \ddot{\theta}_1 & \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T = A \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T + B u \\ \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^T = C \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5)$$

式中 $A = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ J^{-1} M & -J^{-1} F \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ J^{-1} K \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}$ 。

其中, $J = \begin{bmatrix} J_1 + m_2 R^2 & m_2 R L_2 \\ m_2 R L_2 & J_2 \end{bmatrix}$; $F = \begin{bmatrix} f_1 + K_m K_e & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}$; $M = \begin{bmatrix} (m_1 L_1 + m_2 R) g & 0 \\ 0 & m_2 g L_2 \end{bmatrix}$; $K = \begin{bmatrix} K_m \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

1.3 控制案例

本研究以某公司研制的 XZ-II A 型单极旋转式倒立摆系统为控制案例,该系统的主要变量及机械参数如表1所示。

表1 某倒立摆系统的主要变量及机械参数

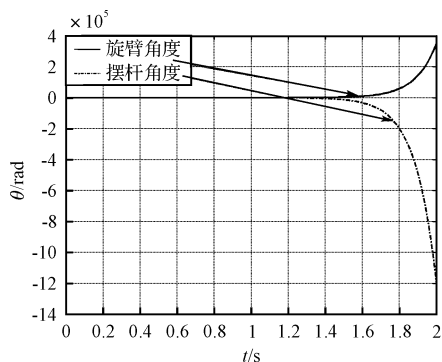
旋转位置 θ_1		摆杆位置 θ_2	
旋转质量 m_1 /kg	0.200	摆杆质量 m_2 /kg	0.052
旋臂长度 R_1 /m	0.20	摆杆长度 R_2 /m	0.25
旋臂质心到转轴距离 L_1 /m	0.10	摆杆质心到转轴距离 L_2 /m	0.12
电机力矩系数 K_m /(N·m·v)	0.023 6	电机反电势系数 K_e /(v·s)	0.286 5
转动惯量 J_1 /(kg·m ²)	0.004	转动惯量 J_2 /(kg·m ²)	0.001
摩擦力矩系数 f_1 /(N·m·s)	0.01	摩擦力矩系数 f_2 /(N·m·s)	0.001

根据表 1 可求解该系统的极点为(-12. 648 5, -6. 701 4, 9. 045 3, 5. 253 6)。由于极点不是全部分布在 S 根平面的左半部分,所以该系统不稳定。但是根据能控矩阵和能观矩阵的秩为满秩(即 $\text{rank}(Qc) = n$)可判断该系统既可观又可控。

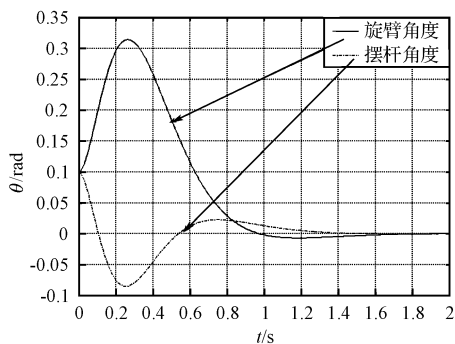
2 倒立摆的极点配置控制

极点配置控制就是通过选择反馈增益矩阵,将闭环系统的极点恰好配置在根平面上所期望的位置,以获得所希望的动态性能。状态反馈对系统任意配置极点的充要条件是系统完全能控^[5]。

上述案例的倒立摆系统是既可观又可控的,故取一组稳定的极点 $P = [-8 + 6j \quad -8 - 6j \quad -4 + 3j \quad -4 - 3j]$,通过极点配置的方法得到一组反馈控制矩阵为 $k = [3. 440 8 \quad -61. 644 7 \quad -4. 808 4 \quad -6. 696 2]$ 。系统对初始条件的响应曲线如图 4 所示(初始条件为 $(\theta_1, \theta_2) = (0. 1, 0. 1)$)。



(a) 控制前的响应曲线



(b) 极点配置后的响应曲线

图 4 系统对初始条件的响应曲线

由图 4 可知,控制前系统不稳定,如图 4(a)所示;通过极点配置的方式控制后,系统达到了稳定状态,如图 4(b)所示,系统大约在 1.6 s 达到稳定状态。

3 旋转倒立摆的二次型最优控制

本研究的倒立摆系统被线性化了,故根据现代控

制理论,设状态反馈调节律的形式为: $u = -K_r X$,使线性二次型最优性能指标 J 最小,二次型的性能指标函数^[6]是:

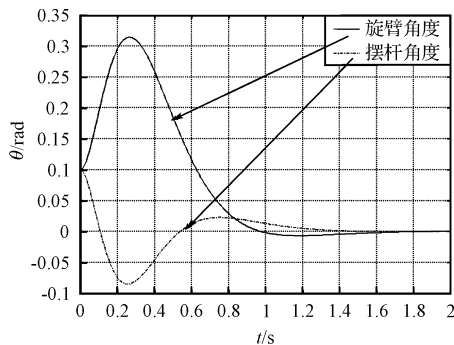
$$J = \int_0^{\infty} (X^T Q X + u^T R u) dt \quad (6)$$

式中 Q —状态变量加权阵; R —控制加权阵; Q —半正定阵; R —正定阵。

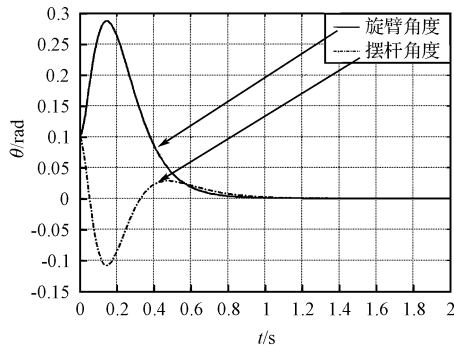
状态反馈矩阵 $K_r = -R^{-1} B^T P$,其中 P 为满足代数黎卡提矩阵方程的惟一正定对称解,且黎卡提方程为:

$$-PA - A^T P + PBR^{-1} B^T P - Q = 0 \quad (7)$$

设计线性二次型最优控制器的关键是选择加权矩阵 Q 。一般说来, Q 越大,系统达到稳态的时间越短^[7],根据实际调节需要,选择 $Q = \text{diag}[1\ 000, 1, 1, 1]$, $R = 0.5$ 。用 Matlab 求解黎卡提方程,以得到反馈矩阵 $K_r = [-37. 846 1 \quad -177. 814 8 \quad -19. 123 5 \quad -21. 000 2]$,二次型最优控制的仿真曲线如图 5 所示^[8]。



(a) 极点配置控制



(b) 二次型最优控制

图 5 优化前后的仿真响应曲线

由图 5 的各项性能指标的对比可以看出,采用二次型最优控制使系统快速性指标(如峰值时间、调整时间和稳定时间)都有一定减少,其中峰值时间由 0.26 s 下降为 0.15 s,调整时间由 0.84 s 下降为 0.6 s,稳定时间由 1.7 s 降为 1 s;动态平稳性的超调量指标也大幅下降,旋臂由 0.31 rad 降为 0.28 rad 等,系统动态指标均得到了提高,性能得以改善,这对实际工程中的系统优化有重要的意义。(下转第 70 页)

4 仿真实验

基于 Linux 平台,用 C++ 语言实现了模型的重要功能,包括 CA 节点的选取,证书的发放、更新、撤销,以及对所有 CA 节点的监管。在实验中,仿真了 500 个节点的 P2P 网络,其中 CA 节点 5 个,SP 节点 10 个。还模拟分布式的 CA 认证模型作为对比,其中节点数为 500,CA 个数为 5。在两个实验中,为了更接近真实的环境,每个 CA 节点和 CP 节点都会在一随机的一段时间后退出系统 30 min,然后再次加入到网络中。本研究分别对 RSA 密钥长度为 256 位、512 位、1 024 位和 2 048 位的情况进行了对比仿真测试,节点认证的平均时间 \bar{t} 和密钥长度 L 的关系如图 3 所示。

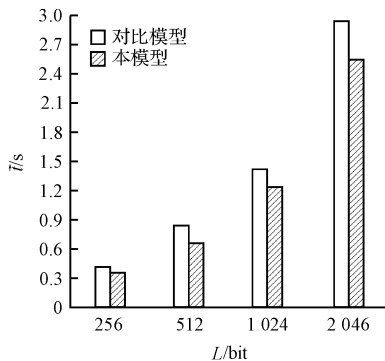


图 3 节点认证的平均时间与密钥长度的关系

从结果中可以看出,本模型中节点获取认证的平均时间要比集中式 CA 认证模型的时间短,从而提高了系统的性能。本模型中,每个 SP 节点只需要维护投诉信息表和 network 中每个 CA 节点管理的 CP 节点列表,并且由于部分节点的投诉以及 SP 节点的投票而产生

的网络开销要小于所有节点寻找新的 CA 进行认证所产生的开销。

5 结束语

本研究对 P2P 网络中现有的认证模型中存在的问题进行分析,提出了一种自适应的认证模型。该模型采用面向 CA 的监管机制,不仅保障了通信的安全,还保证了认证服务的稳定性,提高了系统效率。仿真实验进一步表明,该模型能够更高效地提供节点的认证,保证了通信的安全。对于模型中提出的两个阈值 M 和 K ,没有计算出最优值,需要根据实际应用的情况设定最优值。

参考文献 (References):

- [1] BAILES J E, GRAY F. Managing P2P security[J]. **Communications of the ACM**, 2004, 47(9): 95-98.
- [2] 徐巧枝,刘林强,宋如顺. 一种用于 P2P 网络的访问控制模型[J]. **计算机工程与应用**, 2005, 41(17): 149-152.
- [3] Groove Networks, Inc. . Groove Security Architecture[R]. Groove Networks, Inc., 2004.
- [4] 王朝斌,王 杨,赵慧娟. 一种基于 PKI 的 P2P 计算平台设计与实现[J]. **计算机应用研究**, 2007, 24(2): 227-229.
- [5] 王 涛,卢显良,段翰聪. 基于 SSL 的安全通信模型[J]. **计算机科学**, 2006, 33(5): 104-106.
- [6] 刘汝正. 基于 P2P 环境的分布式数字签名研究及应用[J]. **计算机科学**, 2008, 35(6): 37-39.
- [7] ZHOU L D, HASS Z J. Securing Ad Hoc networks[J]. **IEEE Networks Special Issue on Network Security**, 1999, 13(6): 24-30.
- [8] ZHOU Li-dong, SCHNEIDER F B, RENESSES-V R. A secure distributed online certification authority [J]. **ACM Transactions on Computer Systems (TOCS)**, 2002, 20(4): 3-98. [编辑:李 辉]

(上接第 62 页)

4 结束语

通过对单级旋转倒立摆系统结构和工作原理的分析,本研究建立了合理的数学模型,并对数学模型进行了线性化,为提高系统的控制效率奠定了重要的基础。对倒立摆系统分别通过极点配置和二次型最优控制进行了控制研究,并在 Matlab 中进行了仿真。通过对两种方式控制效果进行比较可知,后者具有更好的响应性能,二次型最优控制还具有算法简单等特点,在实际控制系统中有着重要应用价值。

参考文献 (References):

- [1] BRENIERE Y, RIBREAU C. A double-inverted pendulum

model for studying the adaptability of postural control to frequency during human stepping in place[J]. **Biological Cybernetic**, 1998, 7(9): 337-345.

- [2] 黄苑红,梁慧冰. 从倒立摆装置的控制策略看控制理论的发展和应用[J]. **广东工业大学学报**, 2001, 19(3): 49-52.
- [3] 蒋 珉. 控制系统计算机仿真[M]. 北京:电子工业出版社, 2006.
- [4] 楼建勇,林 江,钱雄伟. 注塑成型模具计算机辅助设计与工艺仿真[J]. **轻工机械**, 2008, 26(4): 24-28.
- [5] 戴忠达,吕 林. 自动控制理论基础[M]. 北京:清华大学出版社, 2001.
- [6] 刘 豹. 现代控制理论[M]. 北京:机械工业出版社, 2004.
- [7] 陶文华. 旋转二级倒立摆的二次型最优控制研究[J]. **测控技术**, 2006, 25(11): 42-44.
- [8] 刘 畅. 基于 CPLD 数控机床的加减速控制[J]. **现代制造技术与装备**, 2009(3): 99-100. [编辑:李 辉]